Tanel Kaart
sügis, 2009

Statistiline andmetöötlus

VL.0435

Loeng 4

✓ Korrelatsioon- ja regressioonanalüüs

http://www.eau.ee/~ktanel/VL_0435/

Lineaarne e Pearsoni korrelatsioonikordaja

Millal kasutada ja mida näitab?

Mõõdab kahe pideva (normaaljaotusega) tunnuse vahelise lineaarse seose tugevust ja suunda.

Arvutusvalem:

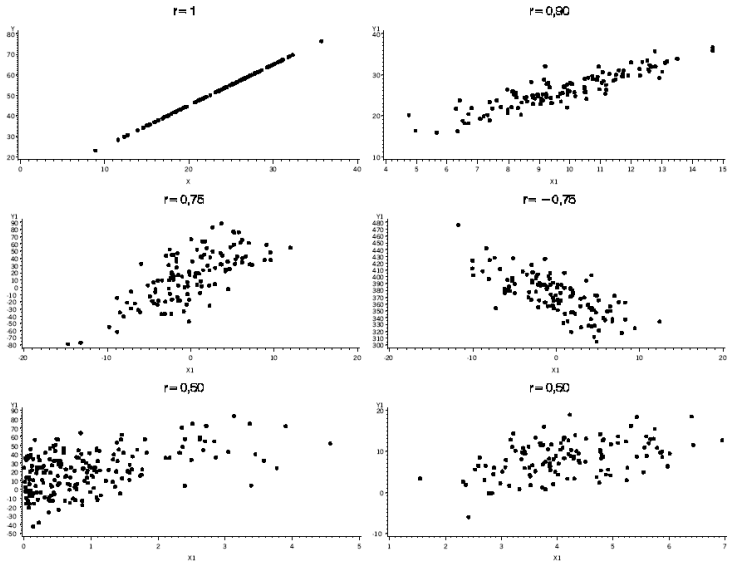
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Omadused:

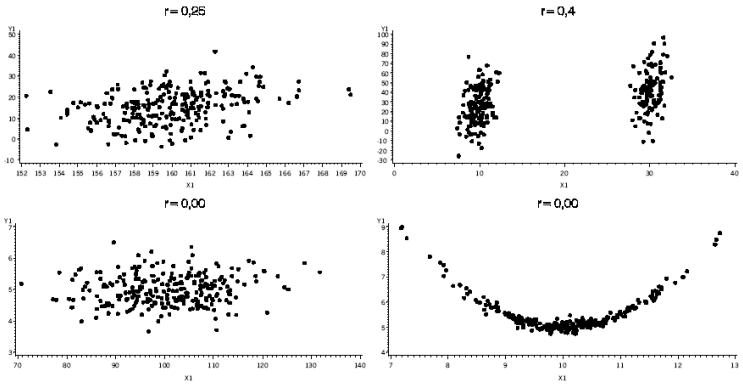
- $-1 \le r \le 1$;
- kui $r > 0$, siis tunnuse X suurenedes suureneb keskmiselt ka tunnus Y; kui $r < 0$, siis X-i suurenedes Y keskmiselt kahaneb ja X-i kahanedes Y keskmiselt suureneb;
- kui tunnused X ja Y on sõltumatud, siis $r = 0$;
- kui tunnuste X ja Y vahel on täpne lineaarne seos, siis $|r| = 1$;
- mida suurem on korrelatsioonikordaja absoluutväärtus, seda tugevam on korrelatiivne seos tunnuste vahel.

Lineaarne e Pearsoni korrelatsioonikordaja

Hajuvusdiagramm e korrelatsiooniväli [*scatter plot*]



Lineaarne e Pearsoni korrelatsioonikordaja



Lineaarne e Pearsoni korrelatsioonikordaja

Kokkuleppelised piirid seose tugevuse iseloomustamiseks:

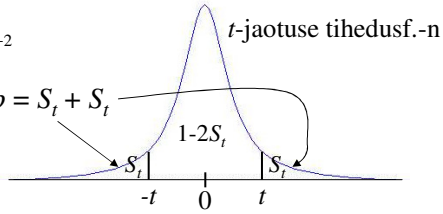
- $|r| \leq 0{,}3$ – nõrk seos;
- $0{,}3 < |r| < 0{,}7$ – keskmine seos;
- $|r| \geq 0{,}7$ – tugev seos.

Seose statistiline olulisus

$H_0 : r = 0$

$H_1 : r \neq 0$

Teststatistik $t = r\sqrt{n-2}\Big/\sqrt{1-r^2} \underset{H_0}{\sim} t_{n-2}$

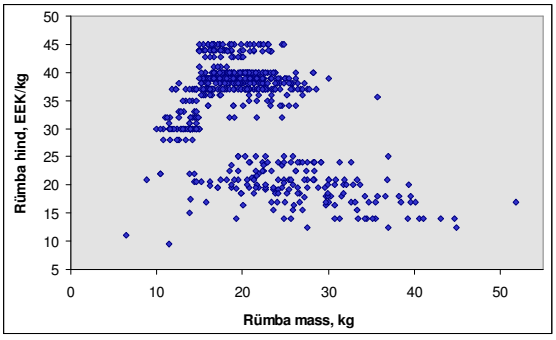


Näiteks *MS Excel*is saab olulisustõenäosuse p leidmiseks kasutada funktsiooni TDIST(t;n-2;2).

Lineaarne e Pearsoni korrelatsioonikordaja

Näide. Lineaarne seos lamba lihakeha massi ja makstava 1 kg hinna vahel (n=686).

Andmed aastast 2002.



$r = -0{,}473$

Teststatistik

$t = r\sqrt{n-2}\Big/\sqrt{1-r^2}$

$= -0{,}473\sqrt{686-2}\Big/\sqrt{1-(-0{,}473)^2}$

$= -14{,}039,$

millest $|t| = 14{,}039$.

Viimase alusel leitav olulisuse tõenäosus $p = 1{,}577*10^{-37} < 0{,}05$,

mistõttu võime lugeda tõestatuks negatiivse seose olemasolu lamba lihakeha massi ja rümba 1 kg hinna vahel (H_1: $r \neq 0$) – mida suurem on tapamajja viidav lammas, seda vähem ühe kg liha eest makstakse.

Lineaarne e Pearsoni korrelatsioonikordaja

Korrelatsioonimaatriks.

Näide. Lineaarsed seosed mesilaste peamiste kehamõõtude vahel (n=1380).

	Tergiit	Tiiva laius	Tiiva pikkus
Tiiva laius	0,052		
Tiiva pikkus	0,061*	0,210***	
Iminokk	-0,035	0,074**	0,253***

* – p<0,05; ** – p<0,01; *** – p<0,001

Osa SAS-i protseduuri CORR väljundist

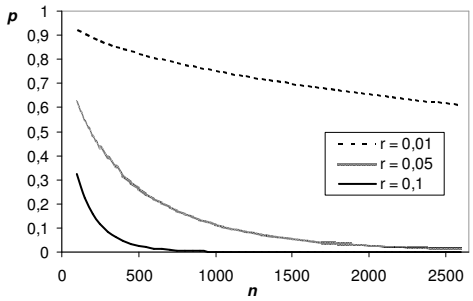
Pearson Correlation Coefficients, N = 1380
Prob > |r| under H0: Rho=0

	Tergiit	Tiiva_l	Tiiva_p	Iminokk
Tergiit	1.00000	0.05226 0.0523	0.06082 0.0239	-0.03518 0.1915
Tiiva_l	0.05226 0.0523	1.00000	0.21007 <.0001	0.07390 0.0060
Tiiva_p	0.06082 0.0239	0.21007 <.0001	1.00000	0.25273 <.0001
Iminokk	-0.03518 0.1915	0.07390 0.0060	0.25273 <.0001	1.00000

Lineaarne e Pearsoni korrelatsioonikordaja

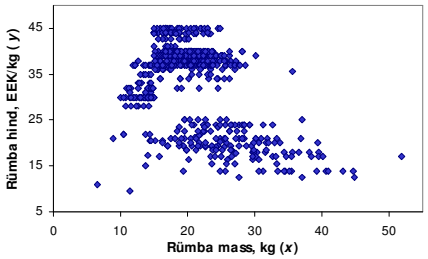
NB!

- ✓ Lineaarne korrelatsioonikordaja mõõdab üksnes seose lineaarsust.
- ✓ Korrelatsioonikordaja ei ütle midagi seose **põhjuslikkuse** kohta.
- ✓ Korrelatsioonikordajale vastav p-väärtus ei puugi anda mingit infot seose tugevuse kohta
  (näiteks n = 39000 korral on ka korrelatsioonikordajale r = 0,01 vastav p < 0,05).



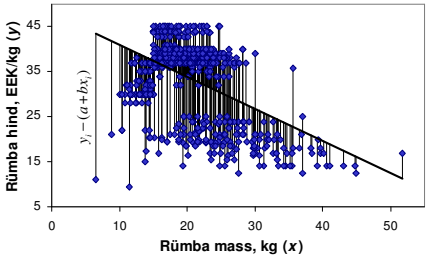
Lineaarne regressioonanalüüs

Millal kasutada ja mida näitab?
Kasutatakse prognoosimaks ühe arvtunnuse väärtusi teis(t)e järgi.



Regressioonivõrrand: $y_i = a + bx_i$
Tunnust *y* nimetatakse funktsioon- ja tunnust *x* argumenttunnuseks.

Näide.
Rümba 1 kg hind = *a* + *b**Rümba mass



Regressioonivõrrandi parameetrid *a* ja *b* hinnatakse vähimruutude meetodil, st et minimiseeritakse prognoosi jäägid:

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 \Rightarrow \min$$

Lineaarne regressioonanalüüs

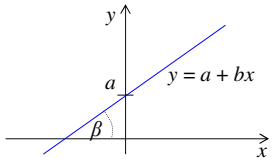
Regressioonivõrrandi parameetrite *a* ja *b* vähimruutude hinnangud:

$$b = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - \overline{xy}) \Big/ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2, \quad a = \overline{y} - b\overline{x}$$

Regressioonivõrrandi kordajate geomeetriline tähendus:

vabaliige *a* märgib kohta, kus regressioonisirge lõikab *y*-telge, ning regressioonikordaja *b* iseloomustab nurka, mille alla regressioonisirge kulgeb *x*-telje suhtes (matemaatilisemalt väljendudes tan(β) = *b*, kus β on sirge tõusunurk).

Sisulise tähenduse kohaselt näitab regressioonikordaja *b*, kui mitme ühiku võrra muutub funktsioontunnuse väärtus, kui argumenttunnus muutub 1 ühiku võrra.



NB!

$y = a + bx \quad \not\Rightarrow \quad x = -a/b + y/b$

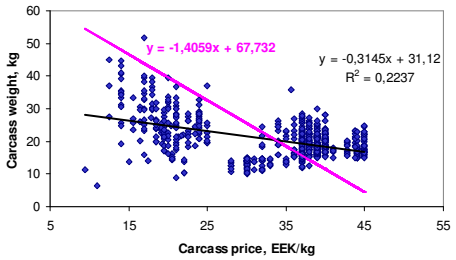
Lineaarne regressioonanalüüs

Näide: **Rümba 1 kg hind** **= a + b*Rümba mass**
= 48,178 + (–0,7113)*Rümba mass

Seega kaasneb lamba lihakeha massi suurenemisega 1 kg võrra 0,71-kroonine hinnalangus 1 kg liha eest.

Aga prognoosides teistpidi:

Rümba mass = 31,12 – 0,3145*Rümba 1 kg hind
≠ (–48,178 + Rümba 1 kg hind) / –0,7113
= 67,732 – 1,406*Rümba 1 kg hind



Lineaarne regressioonanalüüs – jäägid

Näide.
Rümba 1 kg hind = a + b*Rümba mass
= 48,178 + (–0,7113)*Rümba mass

Vaatluse jrk nr (i)	Tegelik rümba 1 kg hind (y_i)	Prognoositud rümba 1 kg hind ($a+b*x_i$)	Prognoosi jäägid $y_i-(a+b*x_i)$
1	39	31,250	7,750
2	39	37,367	1,633
3	40	37,083	2,917
4	39	30,824	8,176
5	39	33,171	5,829
6	37	34,593	2,407
7	39	32,175	6,825
8	39	32,744	6,256
9	37	31,250	5,750
10	34	31,677	2,323
11	37	35,304	1,696
12	33	37,936	-4,936
13	33	39,216	-6,216
14	37	33,597	3,403
15	39	32,175	6,825
…	…	…	…

Regressioonimudeli sobivus

Determinatsioonikordaja R^2 ütleb, kui suure osa uuritava tunnuse varieeruvusest mudel ära kirjeldab, $0 \le R^2 \le 1$.
Esitatakse enamsti protsentides.

Mida suurem, seda parem!

Leitakse kui mudelile vastava hajuvuskomponendi $SS_1 = \sum_{i=1}^{n}[(a+bx_i)-\bar{y}]^2$ ja uuritava tunnuse koguhajuvust kirjeldava hälvete ruutude summa $SS = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$ jagatis: $R^2 = SS_1/SS$.

Mudeli standardviga *SE* on mudeli prognoosijäägi standardhälve (näitab, kui palju prognoos keskmiselt vale on).

Mida väiksem, seda parem!

Mitmene korrelatsioonikordaja *R* mõõdab uuritava tunnuse ja tema prognoositud väärtuste vahelist korrelatsiooni.

Mida suurem, seda parem!

Regressioonimudeli sobivus

Hüpoteeside kontroll

1) Hüpotees mudeli, kui terviku kohta (võrreldakse konstrueeritud mudeli ja nn konstantse mudeli $y=a$ jääkide varieeruvust):

H_0 : mudel ei ole parem võrreldes konstantse mudeliga
H_1 : mudel on parem võrreldes konstantse mudeliga

ehk

$H_0 : y = a$
$H_1 : y = a + bx$

ehk

H_0 : regressioonivõrrand ei ole statistiliselt oluline
H_1 : regressioonivõrrand on statistiliselt oluline

2) Hüpoteesid mudeli parameetrite kohta – kontrollitakse väidet iga parameetri nullist erinemise kohta:

$H_0: a = 0$ $\quad H_0: b = 0$
$H_1: a \neq 0$ $\quad H_1: b \neq 0$

Reaalselt rakendada on põhjust vaid statistiliselt olulist regressioonivõrrandit.

Regressioonimudeli sobivus

Näide.

Rümba 1 kg hind = $a + b$*Rümba mass = 48,178 + (–0,7113)*Rümba mass

MS Exceli protseduuri *Regression* väljund:

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0,4730
R Square	0,2237
Adjusted R Square	0,2226
Standard Error	7,8450
Observations	686

Mitmene korrelatsioonikordaja – mõõdab uuritava tunnuse ja tema prognoositud väärtuste vahelist korrelatsiooni. Mida suurem, seda parem!

Determinatsioonikordaja R^2 ja selle väikeste valimite tarvis kohandatud [*adjusted*] väärtus

Mudeli standardviga

H_0 : mudel ei ole parem võrreldes konstantse mudeliga
H_1 : mudel on parem võrreldes konstantse mudeliga

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression	1	12130,21573	12130,2157	197,0999	1,57702E-39
Residual	684	42095,74764	61,5435		
Total	685	54225,96337			

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*
Intercept	48,1782	1,0843	44,4341	8,2819E-204	46,0493	50,3070
R_mass	-0,7113	0,0507	-14,0392	1,5770E-39	-0,8107	-0,6118

Mudeli parameetrite hinnangud

Hüpoteeside kontroll mudeli iga parameetri kohta:

$H_0: a = 0$
$H_1: a \neq 0$

$H_0: b = 0$
$H_1: b \neq 0$

Regressioonanalüüsi eeldused

Regressioonivõrrandi parameetrite hindamine **ei eelda** tunnuste jaotumist vastavalt normaaljaotuse seaduspäradele!

Mudeli täpsuse ja **statistilise olulisuse** hindamiseks peavad:

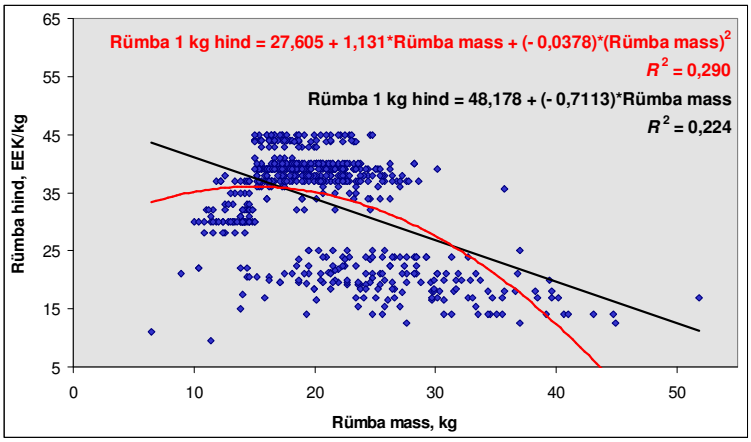
- mudeli (prognoosi) jäägid olema ligikaudu normaaljaotusega (kontrollimiseks histogramm, tõenäosuspaber);
- mudeli jäägid olema ühtlase varieeruvusega (hajuvusdiagramm).

Ükskõik kumma eelduse rikutuse korral ei pruugi mudeli kohta käivate hüpoteeside kontrollimisel arvutatavate teststatistikute jaotusseadused kehtida, mistõttu ei pruugi õiged olla ka otsustused mudeli sobivuse ja rakendatavuse üle.

Eelkõige teise eelduse paikapidamatus võib vihjata mittesobivale mudelile (vale matemaatiline funktsioon, mõni arvestamata jäänud argument vmt).

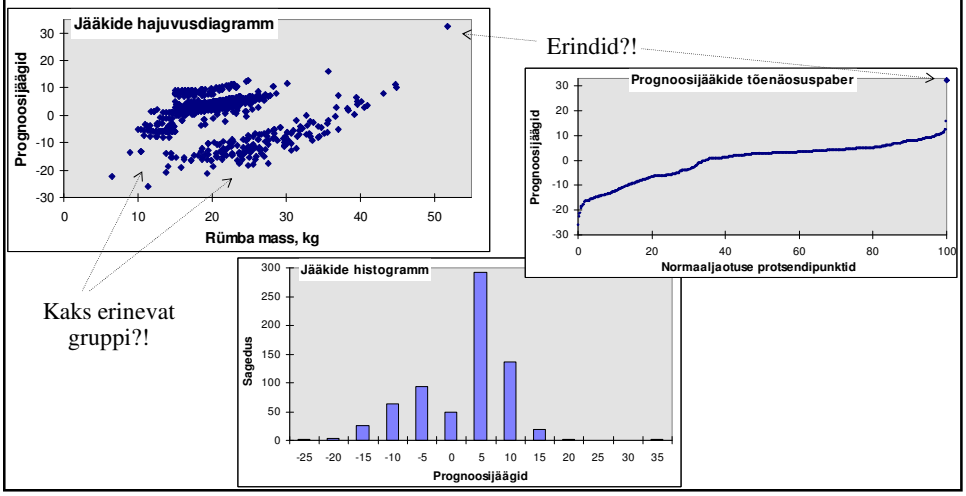
Regressioonanalüüsi mudeli valik/diagnostika

Näide. Seos lamba lihakeha massi ja makstava 1 kg hinna vahel (n = 686).



Regressioonanalüüsi mudeli jääkide analüüs

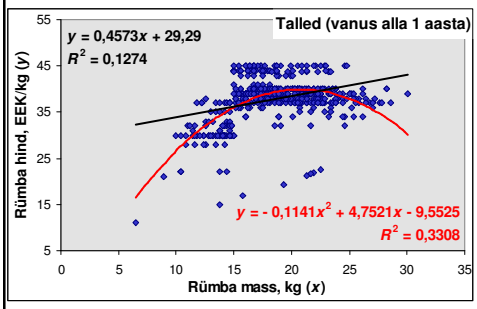
Näide. Seos lamba lihakeha massi ja makstava 1 kg hinna vahel (n = 686).
Prognoosijäägid on leitud ruutvõrrandi baasil:
Rümba 1 kg hind = 27,605 + 1,131*Rümba mass + (- 0,0378)*(Rümba mass)^2

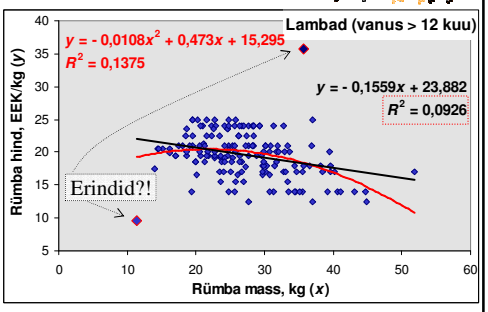


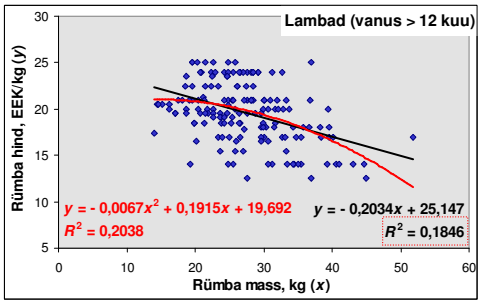
Regressioonanalüüsi mudeli valik/diagnostika

Rümbad jaotatuna kahte kategooriasse:

1. alla 1 aasta vanuste lammaste e. tallede rümbad
2. kõigi teiste lammaste rümbad







Mitmene regressioonanalüüs

Piimatoodang, kg = $a + b_1$ * Söödakulud (EEK/1 kg piim) + b_2*Lakt_nr + b_3*Poeg_aasta

The SAS System 10:47 Saturday, October 23, 2004

The REG Procedure
Model: MODEL1
Dependent Variable: PIIM_KG PIIM_KG

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	34109062	11369687	9.27	<.0001
Error	43	52724352	1226148		
Corrected Total	46	86833414			

Otsus: mudel on parem võrreldes konstantse mudeliga (H_1)

Root MSE	1107.31554	R-Square	0.3928
Dependent Mean	9654.08511	Adj R-Sq	0.3504
Coeff Var	11.46992		

Determinatsioonikordaja R^2 (kohandatud) väärtus ütleb, et konstrueeritud mudeli abil on võimalik ära kirjeldada 35% piimatoodangu varieeruvusest

Parameter Estimates

Variable	Label	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	Intercept	1	711091	583034	1.22	0.2292
SOODAK_1	soodak_1	1	88.10517	31.79147	2.77	0.0082
LAKT_NR	lakt	1	1558.83257	451.21172	3.45	0.0013
PGAASTA	PGAASTA	1	-353.33163	291.29395	-1.21	0.2318

Hüpoteeside kontroll mudeli iga parameetri kohta:
$b_1 \neq 0$ (H_1);
$b_2 \neq 0$ (H_1);
$b_3 = 0$ (H_0)
(vabaliiget a tavaliselt mudelist välja ei jäeta)

Piimatoodang, kg
= 711091 + 88,11 * Söödakulud (EEK/1 kg piim)
+ 1558,83*Lakt_nr – 353,33*Poeg_aasta

Otsus: uus mudel kujul

Piimatoodang, kg = $a + b_1$ * Söödakulud (EEK/1 kg piim) + b_2*Lakt_nr

Astakkorrelatsioonikordaja e Spearmani korrelatsioonikordaja

Millal kasutada ja mida näitab?

Mõõdab kahe arvtustunnuse vahelise monotoonse seose tugevust ja suunda.

Ei ole tundlik erindite suhtes ega eelda tunnuste normaalset jaotumist (on põhimõtteliselt kasutatav ka järjestustunnuste puhul).

Arvutamine: leitakse kui seos vaatluste järjekorranumbrite e astakute vahel:

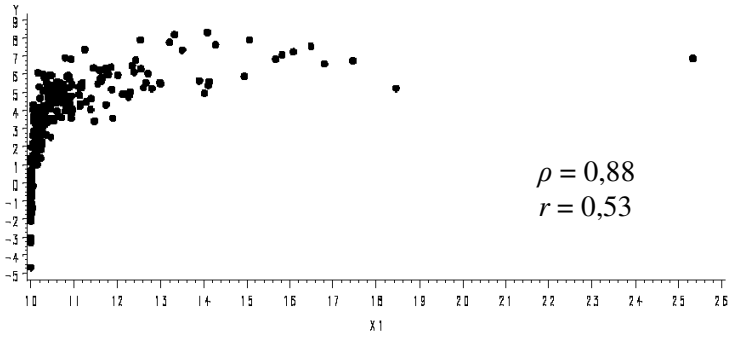
$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - y_{(i)})^2}{n(n^2-1)},$$

kus $x_{(i)}$ on tunnuse X väärtuse x_i astak ja $y_{(i)}$ on tunnuse Y väärtuse y_i astak.

Omadused:

- $-1 \le \rho \le 1$;
- kui tunnuste vahel on kasvav monotoonne seos, siis $\rho > 0$;
  kui tunnuste vahel on kahanev monotoonne seos, siis $\rho < 0$;
- kui tunnused X ja Y on sõltumatud, siis $\rho = 0$;
- kui tunnuste X ja Y vahel on funktsionaalne monotoonne seos, siis $|\rho| = 1$.

Lineaarne *versus* astakkorrelatsioonikordaja



$\rho = 0{,}88$
$r = 0{,}53$