Biomeetria

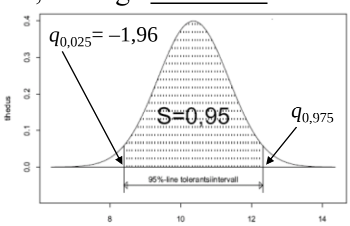
Usaldusintervall.
Hüpoteeside kontrolli filosoofia ja põhimõisted.

Tolerantsiintervall

Kogenud kalastajana teate, et teie poolt siiani püütud haugid on keskmiselt kaalunud 785 g standardhälbega 340 g. Perele õhtusöögiks kala püüdes oleks ju huvitav teada, kui palju kaalub järgmine konksu otsa jääv haug?

Täpset vastust sellele küsimusele statistika ei anna, küll aga saab leida vahemiku, millesse järgmise haugi kaal satub suure (näiteks 95%) tõenäosusega.

Väärtuste vahemik, kuhu kuuluvad 95% uuritava tunnuse väärtustest, on 95%-**tolerantsiintervall**.



Teame, et kui $X \sim N(785;\, 340^2)$, siis $(X–785)/340 \sim N(0;\, 1)$.

Standardse normaaljaotuse kohta teame, et 95% väärtustest jääb vahemikku ($q_{0,025}$, $q_{0,975}$) = (–1,96; 1,96).

Seega

$$\mathrm{P}\left(-1,96 < \frac{X-785}{340} < 1,96\right) = 0,95$$

ja

$$\mathrm{P}\left(785 - 1,96 \times 340 < X < 785 + 1,96 \times 340\right) = \mathrm{P}(118,6 < X < 1451,4) = 0,95$$

Usaldusintervall

Hinnatava parameetri usaldusintervall (vahemikhinnang) kujutab enesest sellist piirkonda parameetri punkthinnangu ümber, mis katab parameetri õige väärtuse küllalt suure etteantud tõenäosusega:

$$P(\underline{m} < m < \overline{m}) = 1 - \alpha$$

- α on etteantud tõenäosus, mida nimetatakse **olulisuse nivooks** [*significance level*] (tavaliselt 0,01 või 0,05);
- $1-\alpha$ on **usaldusnivoo** [*confidence level*] (ühe lähedane etteantud tõenäosus);
- m on õige, ent mitteteadaolev jaotusparameetri väärtus;
- $\underline{m}$ ja $\overline{m}$ on parameetri m **(1–α)-usalduspiirid**
  (näiteks kui α = 0,05, siis on tegu 95%-liste usalduspiiridega).

Täpsuse huvides räägitakse vahel ka alumisest ja ülemisest usalduspiirist [*lower/upper confidence limit*].

Usaldusintervall (*confidence interval*) keskmisele

✓ Tunnuse X keskmise $\bar{x}$ jaotus

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ ehk } \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

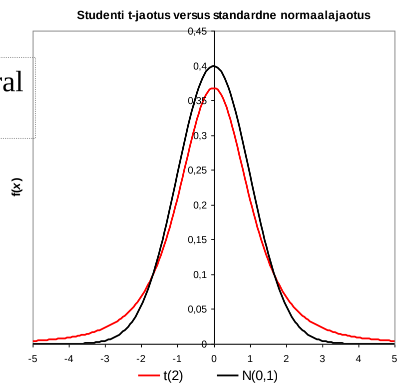
Kui σ ei ole teada, siis $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Toodud seosed kehtivad <u>suure valimi</u> korral sõltumata uuritava tunnuse jaotusest!

✓Sobiva tõenäosusega usaldusintervalli saamiseks on vaja leida $\bar{x}$ jaotuse vastav kvantiil:
tõenäosusele 1-α vastav α-kvantiil q_α, nii et

$$P(X < q_\alpha) = \alpha$$

(t-jaotuse puhul $t_{\alpha,n-1}$, standardse normaaljaotuse puhul z_α)



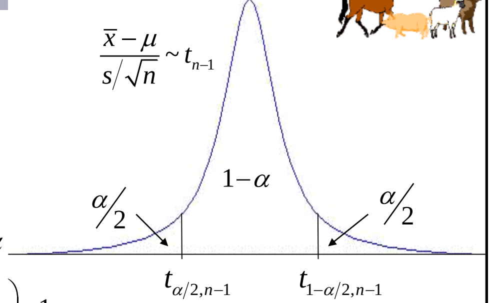
q_α on sisuliselt sama, mis protsentiil;
näiteks 0,5-kvantiil on mediaan, sest P(X < *med*) = 0,5.

t-jaotuse *α*-kvantiilide $t_{\alpha,n\text{-}1}$ väärtused

$f = n-1$	α =0,01	α=0,025	α =0,05	α =0,95	α=0,975	α =0,99
1	-31,82	-12,71	-6,31	6,31	12,71	31,82
2	-6,97	-4,30	-2,92	2,92	4,30	6,97
3	-4,54	-3,18	-2,35	2,35	3,18	4,54
4	-3,75	-2,78	-2,13	2,13	2,78	3,75
5	-3,37	-2,57	-2,01	2,01	2,57	3,37
6	-3,14	-2,45	-1,94	1,94	2,45	3,14
7	-3,00	-2,36	-1,89	1,89	2,36	3,00
8	-2,90	-2,31	-1,86	1,86	2,31	2,90
9	-2,82	-2,26	-1,83	1,83	2,26	2,82
10	-2,76	-2,23	-1,81	1,81	2,23	2,76
12	-2,68	-2,18	-1,78	1,78	2,18	2,68
14	-2,62	-2,14	-1,76	1,76	2,14	2,62
16	-2,58	-2,12	-1,75	1,75	2,12	2,58
18	-2,55	-2,10	-1,73	1,73	2,10	2,55
20	-2,53	-2,09	-1,73	1,73	2,09	2,53
25	-2,49	-2,06	-1,71	1,71	2,06	2,49
30	-2,46	-2,04	-1,70	1,70	2,04	2,46
40	-2,42	-2,02	-1,68	1,68	2,02	2,42
60	-2,39	-2,00	-1,67	1,67	2,00	2,39
120	-2,36	-1,98	-1,66	1,66	1,98	2,36
∞	-2,33	-1,96	-1,64	1,64	1,96	2,33

Usaldusintervall

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$



Usaldusintervall keskmisele

$$P\left(t_{\alpha/2,n-1} \le \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \le t_{1-\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \bar{x}-\mu \le t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-\bar{x}+t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le -\mu \le -\bar{x}+t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x}-t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \ge \mu \ge \bar{x}-t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x}-t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}+t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

(1–α)-usalduspiirid: $\left(\underline{\mu};\bar{\mu}\right) = \left(\bar{x}-t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}};\bar{x}+t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

Kui valim on suur (n > 100), siis võib kasutada ka normaaljaotust:

$$\left(\underline{\mu};\bar{\mu}\right) = \left(\bar{x}-z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}};\bar{x}+z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Usaldusintervall

α=0,1 → 90%-usaldusintervall

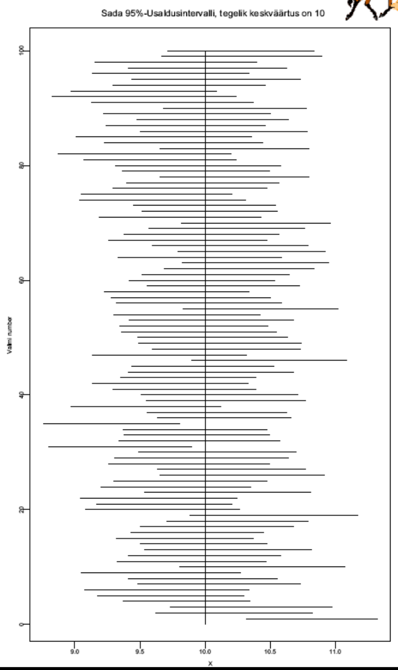
5% $\underline{\mu}$ 90% $\overline{\mu}$ 5%

α=0,05 → 95%-usaldusintervall

2,5% $\underline{\mu}$ 95% $\overline{\mu}$ 2,5%

α=0,01 → 99%-usaldusintervall

0,5% $\underline{\mu}$ 99% $\overline{\mu}$ 0,5%



Usaldusintervall

Näide. Teadur Bella Klaarat huvitab, kui mitu päeva kulub uue ravimeetodi korral kurjast haigusest paranemiseks herefordi tõugu veistel Eestis. Proua Klaara ravis uue meetodiga 10 veist ja fikseeris järgmised tervenemisajad: 3, 5, 4, 6, 2, 6, 5, 6, 5 ja 3 päeva.
95%-line usaldusintervall = ?

$\bar{x} = 4,5;\ s \approx 1,43 \qquad t_{1-\alpha/2;(n-1)} = t_{0,975;9} = 2,26$

$$\left(\underline{\mu};\overline{\mu}\right) = \left(\bar{x} - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(4,5 - 2,26\frac{1,43}{\sqrt{10}};\ 4,5 + 2,26\frac{1,43}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \left(4,5 - 2,26 \times 0,45;\ 4,5 + 2,26 \times 0,45\right) = \left(3,47;\ 5,53\right)$$

95%-lise tõenäosusega võib väita, et keskmine tervenemisaeg on kuskil vahemikus 3,47-st 5,53-ni.

Suurendamaks hinnangu täpsust, tuleks ravida enam veiseid, sest mida suurem on *n*, seda kitsamaks muutub usaldusintervall.

Hüpoteeside kontroll

Näiteid hüpoteesidest

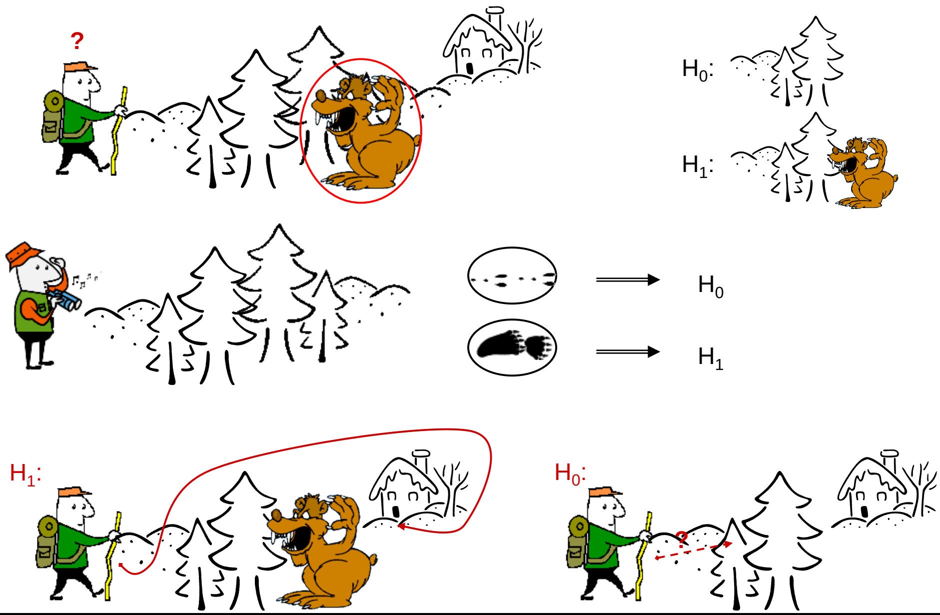
✓ Kas jogurti toiduvärviga värvimine parandab tarbijate meelest selle maitseomadusi?
✓ Kas leidub seos lehma tiinestumise ja piimatoodangu vahel?
✓ Kas nn õnnelike sigade tailiha % on erinev tavalises sigalas kasvanud sigade vastavast näitajast?
✓ Kas Eesti ja Soome vetest püütud lõhed on geneetiliselt erinevad?

Hüpoteeside paar

H_1 - väide, mida me soovime tõestada (sisukas e alternatiivne hüpotees; *alternative hypothesis*),
H_0 - väide, et üldkogum vastab teatavale standardile (nullhüpotees; *null hyphothesis*).

Teststatistik – valimifunktsioon, mis mõõdab erinevust nullhüpoteesis väidetu ja andmetest ilmneva vahel – kui erinevus on piisavalt suur, kummutatakse nullhüpotees.

Hüpoteeside kontrolli loogika



Hüpoteeside kontroll

Vead hüpoteeside kontrollimisel

Esimest liiki viga tekib siis, kui võetakse vastu alternatiivne hüpotees H_1, aga tegelikult on õige nullhüpotees H_0.

Teist liiki viga tekib siis, kui jäädakse nullhüpoteesi H_0 juurde, kuid õige oleks alternatiivne hüpotees H_1.

Tegelik olek / Otsus	Õige H_0	Õige H_1
Jääme H_0 juurde	+	II liiki viga, β
Võtame vastu H_1	I liiki viga, α	+

Olulisuse nivoo [*significance level*] = α on maksimaalne lubatav I liiki vea tõenäosus (tavaliselt α = 0,05; 0,01; 0,001), nö valulävi.

Testi võimsus [*power*] = $1-\beta$ on tõenäosus lugeda õigeks ka tegelikult kehtiv alternatiivne hüpotees H_1.

Hüpoteeside kontroll

Olulisuse tõenäosus *p* (*probability level*, *p-value*)

– tõenäosus eksida, väites oma andmete (valimi) põhjal alternatiivse hüpoteesi H_1 kehtimist;

– tõenäosus saada uuritav (või sellest nullhüpoteesi suhtes veel ekstreemsem) valim juhuslikult, kui kehtib nullhüpotees: P(valim|H_0);

– minimaalne olulisuse nivoo alternatiivse hüpoteesi H_1 tõestamiseks, ehk I liiki vea tegemise tõenäosus antud eksperimendi korral.

Otsuse vastuvõtmine (1)

Võrreldakse olulisuse tõenäosust p ja olulisuse nivood α:

¤ **kui $p \le \alpha$, siis on tõestatud H_1,**

¤ **kui $p > \alpha$, siis jääme H_0 juurde.**

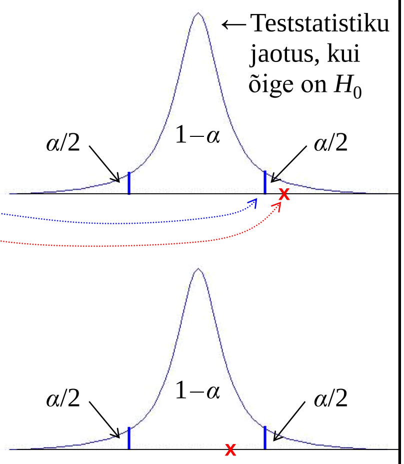
Hüpoteeside kontroll

Otsuse vastuvõtmine (2)

Võrreldakse arvutatud teststatistiku väärtust selle kriitilise väärtusega (tuginedes teoreetilistele jaotustele või simuleerimise tulemustele):

¤ kui teststatistiku absoluutväärtus on suurem tema nullhüpoteesipõhise jaotuse kriitilisest väärtusest (1–α/2-kvantiilist), loetakse õigeks H_1,

¤ vastupidisel juhul jäädakse nullhüpoteesi H_0 juurde.



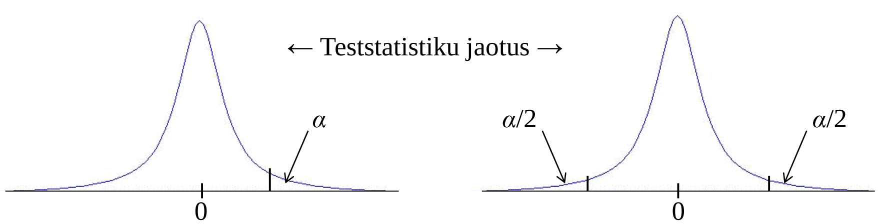
Hüpoteeside kontroll

Ühepoolne [*one-tail*] ***versus*** **kahepoolne** [*two-tail*] **hüpotees**

Näiteks:

$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

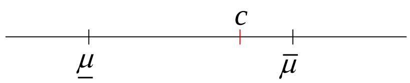
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$



Seos hüpoteeside kontrolli ja usalduspiiride vahel

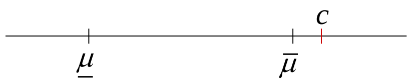
$H_0: \mu = c$

võetakse vastu siis, kui c kuulub usalduspiirkonda



$H_1: \mu \neq c$

on tõestatud siis, kui c ei kuulu usalduspiirkonda (olulisusnivool α)



Praktikas kontrollitakse sageli kas mingi kordaja või gruppide vahe erinevust nullist.
Erinevuse võib lugeda statistiliselt oluliseks ette antud olulisuse nivool (näiteks α=0,05), kui uuritavale kordajale või võrreldavate gruppide erinevusele (näiteks $\mu_1 - \mu_2$) konstrueeritud (95%-line) usaldusintervall ei sisalda nulli!

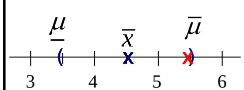
Populatsiooni keskväärtuse võrdlemine konstandiga

Näide. Kümnel herefordi tõugu veisel Eestis kulus kurjast haigusest paranemiseks vastavalt 3, 5, 4, 6, 2, 6, 5, 6, 5 ja 3 päeva. Teades, et sama tõugu veised Prantsusmaal tervenevad keskmiselt 5,4 päevaga, kontrollida hüpoteesi tervenemisaegade erinevusest Eestis ja Prantsusmaal.

$H_0: \mu = 5,4$
$H_1: \mu \neq 5,4$

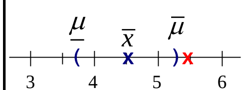
$\bar{x} = 4,5; \; s \approx 1,43$

95%-lised usalduspiirid keskmisele tervenemisajale:
$\underline{\mu} = 3,47$ ja $\bar{\mu} = 5,53$



Järeldused: et $\underline{\mu} = 3,47 < 5,4 < 5,53 = \bar{\mu}$,
siis ei ole meil olulisuse nivoo $\alpha = 0,05$ korral alust ümber lükata nullhüpoteesi sellest, et Eestis peetavatel herefordi tõugu veistel kulub tervenemiseks sama palju aega kui Prantsusmaa veistel.

Lubades 10%-list eksimist, e võttes $\alpha = 0,1$, saame 90%-lised usalduspiirid keskmisele tervenemise ajale kujul
$\underline{\mu} = 3,66$ ja $\bar{\mu} = 5,33$, mistõttu võime lugeda tõestatuks, et Eestis peetavate herefordi tõugu veiste tervenemise aeg erineb Prantsusmaal peetavate sama tõugu veiste tervenemise ajast.



Populatsiooni keskväärtuse võrdlemine konstandiga

Näide. Kümnel herefordi tõugu veisel Eestis kulus kurjast haigusest paranemiseks vastavalt 3, 5, 4, 6, 2, 6, 5, 6, 5 ja 3 päeva. Teades, et sama tõugu veised Prantsusmaal tervenevad keskmiselt 5,4 päevaga, kontrollida hüpoteesi tervenemisaegade erinevusest Eestis ja Prantsusmaal.

$H_0: \mu = 5{,}4$
$H_1: \mu \neq 5{,}4$

või

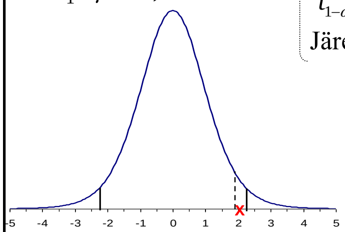
$H_0: \mu \geq 5{,}4$
$H_1: \mu < 5{,}4$

$n = 10;\ \bar{x} = 4{,}5;\ s \approx 1{,}43;\ \underline{\alpha = 0{,}05}$

Teststatistik: $|t| = \left|\dfrac{\bar{x} - 5{,}4}{s}\sqrt{n}\right| = \left|\dfrac{4{,}5 - 5{,}4}{1{,}43}\sqrt{10}\right| = |-1{,}985| = 1{,}985$

Teststatistiku kriitiline väärtus (kahepoolne hüpotees):
$t_{1-\alpha/2;n-1} = t_{0{,}975;9} = 2{,}26$
Järeldus: $|t| = 1{,}985 < 2{,}26 = t_{0{,}975;9} \Rightarrow H_0: \mu = 5{,}4$

Teststatistiku kriitiline väärtus (ühepoolne hüpotees):
$t_{1-\alpha;(n-1)} = t_{0{,}95;9} = 1{,}83$
Järeldus: $t_{0{,}95;9} = 1{,}83 < 1{,}985 = |t| \Rightarrow H_1: \mu < 5{,}4$



Näiteks *MS Excelis* funktsioon TDIST(t;n-1;2)

Arvuti abil saab leida ka täpse tõenäosuse teststatistiku väärtuse $|t| = 1{,}985$ saamiseks eeldusel, et kehtib H_0:
$p = 0{,}0784$ (2-poolne hüp.); $p = 0{,}0392$ (1-poolne hüp.)