I

SISSEJUHATUS MAATRIKSALGEBRASSE

1.1 DEFINITSIOONID

1.1.1 Maatriks, vektor, skalaar

Def. Maatriksiks nimetatakse ridadesse ja veergudesse (tabelisse) paigutatud elementide hulka.

Maatriksi **elementideks** võivad olla arvud, matemaatilised avaldised, teised maatriksid. Maatrikseid tähistatakse tavaliselt trükitähtedega ja nende elemente vastavate kirjatähtedega, lisades vajadusel indeksid.

Näiteks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ või $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Def. Maatriksi **dimensiooniks** (**järguks**, **suuruseks**) nimetatakse tema ridade ja veergude arvu.

Näiteks ülaltoodud maatriks **A** on 2×3-maatriks.

Vahel näidatakse maatriksi järk ära alumises indeksis - $\mathbf{A}_{2\times3}$.

Def. Vektoriks nimetatakse maatriksit, millel on vaid üks rida või üks veerg, ja kõneldakse siis vastavalt rea- või veeruvektorist. Kui pole täpselt määratletud, kas on tegu rea- või veeruvektoriga, mõistetakse vektori all veeruvektorit. Vektori elementide tähistamisel kasutatakse vaid üht indeksit.

Näiteks $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Def. Skalaariks nimetatakse maatriksit, millel on 1 rida ja 1 veerg, s.t. 1×1-maatriksit.

Näiteks $\lambda = 1$.

1.1.2 Erikujulised maatriksid

Def. Ruutmaatriksiks nimetatakse maatriksit, mille ridade ja veergude arv on võrdsed. Vastasel juhul on tegu **ristkülikmaatriksiga**. Kõik vektorid on ristkülikmaatriksid.

Def. Diagonaalmaatriksiks nimetatakse ruutmaatriksit, mille kõik väljaspool peadiagonaali paiknevad elemendid võrduvad nulliga ($d_{ij} = 0$, kui $i \neq j$).

Näiteks $\mathbf{D}_{n\times n} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$ või $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Def. Ühikmaatriksiks nimetatakse diagonaalmaatriksit, mille peadiagonaali elemendid võrduvad ühega. Ühikmaatriksit tähistatakse:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Def. Ruutmaatriksit, mille kõik elemendid allpool (ülalpool) peadiagonaali võrduvad nulliga, nimetatakse **alumiseks** (**ülemiseks**) **kolmnurkmaatriksiks**.

Näiteks maatriksid $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ on vastavalt ülemine ja alumine kolmnurkmaatriks.

Def. Sümmeetriline maatriks on ruutmaatriks, mille ülalpool peadiagonaali paiknevad elemendid on võrdsed vastavate allpool peadiagonaali paiknevate elementidega, s.t. element a_{ij} on võrdne elemendiga a_{ji}.

Näiteks maatriks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ on sümmeetriline, sest $a_{12} = a_{21} = 6$, $a_{13} = a_{31} = 8$ ja $a_{23} = a_{32} = 3$.

Def. Blokkmaatriksiks nimetatakse maatriksit, mille elementideks on omakorda maatriksid.

Näiteks $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{d} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, kus $\mathbf{a} = \ 3\ $, $\mathbf{b} = \ 1\ 2\ $, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2 MAATRIKSOPERATSIOONID

1.2.1 Liitmine ja lahutamine

Kahte maatriksit saab **liita** ja **lahutada** vaid siis, kui neil on sama arv ridu ja veerge, s.t. nad on sama järku.

Maatrikseid liidetakse ja lahutatakse elementide kaupa.

Seega, kui **C** = **A** + **B** ja **E** = **A** – **B**, siis $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ja $e_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 40 & 21 \\ 35 & -20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 32 \end{pmatrix}$.

Siis $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 40+7 & 21+5 \\ 35+(-6) & -20+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 26 \\ 29 & 12 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 40-7 & 21-5 \\ 35-(-6) & -20-32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 16 \\ 41 & -52 \end{pmatrix}$.

1.2.2 Korrutamine

Maatriksi **korrutamisel skalaariga** korrutatakse sellega läbi maatriksi iga element.

Näide. $k = 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 40 & 21 \\ 35 & -20 \end{pmatrix}$. Siis $k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\times 40 & 2\times 21 \\ 2\times 35 & 2\times(-20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 42 \\ 70 & -40 \end{pmatrix}$.

Kahte maatriksit saab **omavahel korrutada**, kui esimese maatriksi veergude arv on võrdne teise maatriksi ridade arvuga. Korrutismaatriksi ridade arv on võrdne esimese maatriksi ridade arvuga ja veergude arv teise maatriksi veergude arvuga:

$$\mathbf{C}_{n\times m} = \mathbf{A}_{n\times k}\mathbf{B}_{k\times m} .$$

Korrutismaatriksi element kohal *ij* (reas *i* veerus *j*) leitakse kui esimese maatriksi *i*-nda rea ja teise maatriksi *j*-nda veeru vastavate elementide korrutiste summa:

$$c_{ij} = \textstyle\sum_{h=1}^{k} a_{ih}b_{hj} .$$

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksi **C = AB** elemendid leitakse järgmiselt:

$c_{11} = 1\cdot2 + 4\cdot4 + (-1)\cdot6 = 12$ (maatriksi **A** 1. rida korrutatuna maatriksi **B** 1. veeruga),
$c_{21} = 2\cdot2 + 5\cdot4 + 0\cdot6 = 24$ (**A** 2. rida korrutatuna **B** 1. veeruga),
$c_{31} = 3\cdot2 + 6\cdot4 + 1\cdot6 = 36$ (**A** 3. rida korrutatuna **B** 1. veeruga),
$c_{12} = 1\cdot5 + 4\cdot3 + (-1)\cdot1 = 16$ (**A** 1. rida korrutatuna **B** 2. veeruga),
$c_{22} = 2\cdot5 + 5\cdot3 + 0\cdot1 = 25$ (**A** 2. rida korrutatuna **B** 2. veeruga),
$c_{23} = 3\cdot5 + 6\cdot3 + 1\cdot1 = 34$ (**A** 3. rida korrutatuna **B** 2. veeruga).

Seega $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 25 \\ 36 & 34 \end{pmatrix}$.

Seejuures on maatriks **C** 3×2-maatriks, kus 3 on maatriksi **A** ridade arv ja 2 on maatriksi **B** veergude arv.

Omadused

1. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
2. $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$, kus $\mathbf{I}$ on ühikmaatriks.
3. $\mathbf{ABC} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.
4. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

1.2.3 Maatriksite otsekorrutis

Def. Maatriksite $\mathbf{G}_{n\times m}$ ja $\mathbf{A}_{t\times s}$ **otsekorrutiseks** (**Kroneckeri korrutiseks**) nimetatakse maatriksit

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B},$$

kus maatriksi **A** iga element on korrutatud terve maatriksiga **B**.

Saadud korrutismaatriks on järku $nt\times ms$.

Näide. $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 40 & 0 & 5 & 20 \\ 10 & 40 & 10 & 5 & 20 & 5 \\ 5 & 0 & 10 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 5 & 20 & 0 & 20 & 80 \\ 5 & 20 & 5 & 20 & 80 & 20 \end{pmatrix}$.

Otsekorrutis leiab rakendust mitmemõõtmelisel analüüsil, s.t. kui soovitakse korraga hinnata faktorite mõju enam kui ühele tunnusele (näiteks geneetilise korrelatsiooni arvutamisel).

1.2.4 Transponeerimine, ortogonaalsed ja idempotentsed maatriksid

Def. Maatriksi **A** **transponeeritud** maatriks, mida tähistatakse tavaliselt **A**’ või $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, saadakse, vahetades esialgse maatriksi read ja veerud, s.t. kui $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, siis $b_{ji} = a_{ij}$.

Näide. Kui $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, siis $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Omadused

1. $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.
2. Kui **A** on sümmeetriline, siis $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
3. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.
4. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Näide. Järgnevas tabelis on toodud viie eesti holsteini tõugu pulli suhtelised aretusväärtused (näitavad looma geneetilist paremust või halvemust võrreldes populatsiooni keskmisega, mis on 100 punkti).

Pull	SPAV	SSAV	SVAV	SGAV	STAV	Poegimis-kergus
A	124	92	90	87	97	87
B	122	104	101	101	98	74
C	126	111	107	105	114	81
D	111	118	110	103	112	93
E	119	100	98	89	114	124

SPAV on suhteline piimajõudluse, SSAV on suhteline udara tervise, SVAV on suhteline välimiku, SGAV on suhteline sigivuse ja STAV on suhteline kasutusea aretusvääärtus.

Suhteline üldaretusväärtus, SKAV, leitakse Eestis valemiga
SKAV = 0,5*SPAV + 0,25*SSAV + 0,25*SVAV.

Eesmärgiks on leida ühe maatrikstehtega kõigi pullide suhtelised üldaretusväärtused SKAV ja lisaks ka nö keskmised aretusväärtused, KeskSAV, omistades kõigile kkuele tabelis toodud suhtelisele aretusväärtusele võrdse kaalu 1/6.

Moodustame tabelis toodud pullide suhtelistest aretusväärtustest 5×6 maatriksi **B** nii, et igale pullile vastab üks maatriksi rida ja igale suhtelisele aretusväärtusele üks maatriksi veerg:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}124 & 92 & 90 & 87 & 97 & 87\\ 122 & 104 & 101 & 101 & 98 & 74\\ 126 & 111 & 107 & 105 & 114 & 81\\ 111 & 118 & 110 & 103 & 112 & 93\\ 119 & 100 & 98 & 89 & 114 & 124\end{pmatrix}.$$

Suhteliste üldaretusväärtuste ja nö keskmiste aretusväärtuste tarvis moodustame 2×6 maatriksi **K**, kus erinevad read vastavad erinevatele arvutamistvajavatele aretusväärtustele ja iga veerg vastab ühele suhtelisele aretusväärtusele (tabelis toodud järjekorras):

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0\\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}.$$

Kõigi pullide SKAV ja KeskSAV on siis leitavad maatrikstehtega $\mathbf{BK}^{\mathrm{T}}$, mis on vastavalt transponeerimise 4. ja 1. omadusele identne maatrikstehtega $(\mathbf{KB}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Tulemuseks on 5×2 maatriks, mille iga rida vastab ühele pullile ja iga veerg ühele kokkuvõtlikule aretusväärtusele:

$$\mathbf{BK}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}124 & 92 & 90 & 87 & 97 & 87\\ 122 & 104 & 101 & 101 & 98 & 74\\ 126 & 111 & 107 & 105 & 114 & 81\\ 111 & 118 & 110 & 103 & 112 & 93\\ 119 & 100 & 98 & 89 & 114 & 124\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0\\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}124 & 92 & 90 & 87 & 97 & 87\\ 122 & 104 & 101 & 101 & 98 & 74\\ 126 & 111 & 107 & 105 & 114 & 81\\ 111 & 118 & 110 & 103 & 112 & 93\\ 119 & 100 & 98 & 89 & 114 & 124\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1/2 & 1/6\\ 1/4 & 1/6\\ 1/4 & 1/6\\ 0 & 1/6\\ 0 & 1/6\\ 0 & 1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}107{,}5 & 96{,}2\\ 112{,}3 & 100{,}0\\ 117{,}5 & 107{,}3\\ 112{,}5 & 107{,}8\\ 109{,}0 & 107{,}3\end{pmatrix}.$$

Arvuliselt sama tulemuse saab ka maatrikskorrutise $\mathbf{KB}^{\mathrm{T}}$ abil, ainult sellisel juhul on tulemusmaatriks 2×5 maatriks, milles igale pullile vastab üks veerg ja kokkuvõtlikud aretusväärtused paiknevad eri ridades:

$$\mathbf{KB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0\\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}124 & 92 & 90 & 87 & 97 & 87\\ 122 & 104 & 101 & 101 & 98 & 74\\ 126 & 111 & 107 & 105 & 114 & 81\\ 111 & 118 & 110 & 103 & 112 & 93\\ 119 & 100 & 98 & 89 & 114 & 124\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0\\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}124 & 122 & 126 & 111 & 119\\ 92 & 104 & 111 & 118 & 100\\ 90 & 101 & 107 & 110 & 98\\ 87 & 108 & 105 & 103 & 89\\ 97 & 98 & 114 & 112 & 114\\ 87 & 74 & 81 & 93 & 124\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}107{,}5 & 112{,}3 & 117{,}5 & 112{,}5 & 109{,}0\\ 96{,}2 & 100{,}0 & 107{,}3 & 107{,}8 & 107{,}3\end{pmatrix}.$$

Tulemusi vaadates ilmneb, et suhtelise üldaretusväärtuse SKAV järgi on pullide paremusjärjestus C, D, B, E, A, keskmise suhtelise aretusväärtuse KeskSAV järgi aga D, C-E, B, A. Erinevused tulenevad sellest, et erinevad kokkuvõtlikud aretusväärtused võtavad erinevaid tunnuseid arvesse erineva kaaluga.

Def. Maatriksit nimetatakse **idempotentseks**, kui tema korrutis iseendaga annab tulemuseks iseenda, s.t. maatriks **A** on idempotentne, kui

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A}.$$

Vaid ruutmaatriks saab olla idempotentne.

Def. Ortogonaalne maatriks on ruutmaatriks, mille korrutis oma transponeeritud maatriksiga võrdub ühikmaatriksiga – maatriks **U** on ortogonaalne, kui

$$\mathbf{UU}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{I}.$$

1.2.5 Determinant

Def. Olgu maatriks **A** 2×2-maatriks. Tema **determinandiks** nimetatakse suurust

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Vahel tähistatakse determinanti ka det(**A**).

Enam kui kahedimensionaalse ruutmaatriksi determinant on leitav valemist

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\,|\mathbf{A}_{ij}|,$$

kus a_{ij} on maatriksi **A** i. reas ja j. veerus paiknev element, i märgib maatriksi **A** suvalist rida ning $\mathbf{A}_{ij}$ on maatriksi **A** alammaatriks, mis on saadud esialgsest maatriksist i. rea ja j. veeru ärajätmise tulemusena. Sellist alammaatriksit nimetatakse **miinoriks**.

Def. Maatriksit nimetatakse **singulaarseks**, kui tema determinant võrdub nulliga, ja **mitte-singulaarseks**, kui tema determinant on nullist suurem.

Omadused

1. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$.
2. Kui maatriksid A ja B on sama järku ruutmaatriksid, siis $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.
3. $|\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n|\mathbf{A}|$, A on n×n-maatriks ja α suvaline skalaar.
4. $|\mathbf{I}_n| = 1$.
5. Kui maatriksi vähemalt üks rida või veerg koosneb nullidest, on võrdne või proportsionaalne mõne teise rea või veeruga või avaldub teiste ridade või veergude lineaarkombinatsioonina, on maatriksi determinant null.
6. Diagonaalmaatriksi determinant võrdub tema diagonaalielementide korrutisega, s.t. kui
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}, \text{ siis } |\mathbf{D}| = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}.$$

Näide 1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Võttes $i = 1$, s.t. kasutades arvutamisel maatriksi **A** esimese rea elemente ja nendele vastavaid miinoreid, avaldub determinant kujul

$$|\mathbf{A}| = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(3-4) - 1\cdot(1-2) + 1\cdot(2-3) = -1.$$

Sama tulemuse saaksime ka teisi ridasid (s.t. $i = 2$ või 3) aluseks võttes, samuti kasutades rea asemel veergu ja sellele vastavaid miinoreid.

Näide 2. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$.

Vastavalt maatriksi determinandi 5. omadusele peab |**B**| = 0, sest maatriksi B teine veerg on võrdne 5-kordse esimese veeruga.

Kontrollime: $|\mathbf{B}| = 2 \times 20 - 4 \times 10 = 0$.

1.2.6 Pöördmaatriks

Def. Maatriksi **A pöördmaatriks** $\mathbf{A}^{-1}$ on maatriks, millega esialgset maatriksit vasakult või paremalt korrutades on tulemuseks ühikmaatriks:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \text{ ja } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Pöördmaatriks leidub igal mittenullilise determinandiga (mittesingulaarsel) ruutmaatriksil.

Üldine valem maatriksi **A** pöördmaatriksi $\mathbf{A}^{-1}$ elementide leidmiseks on järgmine

$$a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} \, | \mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_{ij} |}{| \mathbf{A} |},$$

kus a_{ij}^{-1} tähistab maatriksi $\mathbf{A}^{-1}$ ij.-t elementi ja $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_{ij}$ on maatriksi **A** transponeeritud maatriksi $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ij. miinor.

Kui **A** on 2×2-maatriks, avaldub tema pöördmaatriks kujul

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Pöördmaatriksit rakendatakse näiteks **lineaarvõrranditesüsteemide lahendamisel**: korrutades maatriksvõrduse $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ mõlemad pooled vasakult läbi kordajate maatriksi **A** pöördmaatriksiga, saame lahendivektori **x** kujul $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$.

Näide 1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8 \cdot 4 - 6 \cdot 4} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}75 & 1 \end{pmatrix}$.

Kontroll. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}75 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 0{,}5 + 4 \times (-0{,}75) & 8 \times (-0{,}5) + 4 \times 1 \\ 6 \times 0{,}5 + 4 \times (-0{,}75) & 6 \times (-0{,}5) + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Näide 2. Olgu tarvis lahendada lineaarvõrranditesüsteem $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 2y + z = 13 \\ x + 4z = 5 \end{cases}$.

Sama süsteem maatrikskujul on $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$: $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$,

millest $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}6 & 2{,}4 & -0{,}6 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

ehk $x = 17$, $y = 8$ ja $z = -3$.

Pöördmaatriks viimatises maatriksvõrduses on saadud järgnevalt:

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&2&1\\1&0&4\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}1\times\begin{vmatrix}2&0\\1&4\end{vmatrix} & -1\times\begin{vmatrix}3&0\\0&4\end{vmatrix} & 1\times\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix}\\ -1\times\begin{vmatrix}0&1\\1&4\end{vmatrix} & 1\times\begin{vmatrix}-1&1\\0&4\end{vmatrix} & -1\times\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}\\ 1\times\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix} & -1\times\begin{vmatrix}-1&1\\3&0\end{vmatrix} & 1\times\begin{vmatrix}-1&0\\3&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}8&-12&3\\1&-4&1\\-2&3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1{,}6&2{,}4&-0{,}6\\-0{,}2&0{,}8&-0{,}2\\0{,}4&-0{,}6&0{,}4\end{pmatrix},$$

sest $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&2&1\\1&0&4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&0\\0&1&4\end{pmatrix}$ ja determinant

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}-1&3&0\\0&2&1\\1&0&4\end{vmatrix}=-1\times\begin{vmatrix}2&1\\0&4\end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix}0&1\\1&4\end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}=-8+3+0=-5.$$

Omadused

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$.
2. $|\mathbf{A}^{-1}|=|\mathbf{A}|^{-1}$, kui **A** on mittesingulaarne.
3. $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.
4. $(\mathbf{ABC})^{-1}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$; **A**, **B**, **C** - mittesingulaarsed.
5. Diagonaalmaatriksi pöördmaatriks on samuti diagonaalmaatriks, kusjuures tema diagonaalielementideks on esialgse maatriksi diagonaalielementide pöördelemendid, s.t. kui

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}d_{11}&0&\cdots&0\\0&d_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&d_{nn}\end{pmatrix},\text{ siis }\mathbf{D}^{-1}=\begin{pmatrix}1/d_{11}&0&\cdots&0\\0&1/d_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&1/d_{nn}\end{pmatrix}.$$

1.2.7 Lineaarne sõltumatus ja maatriksi astak

Def. Maatriksit **A** nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui ei leidu ühtki vektorit **k** peale nullvektori **0**, mille korral **Ak** = **0**.

Def. Maatriksi **astakuks** nimetatakse tema maksimaalset lineaarselt sõltumatute ridade või veergude arvu. Maatriksi **A** astakut tähistatakse r(**A**). Kui ruutmaatriksi astak võrdub tema ridade või veergude arvuga, siis öeldakse, et maatriks on **täisastakuga**.

NB! Kui ruutmaatriks ei ole täisastakuga, siis võrdub tema determinant nulliga ja pöördmaatriksit ei eksisteeri.

Omadused

1. $\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.
2. Kui **A** on $p\times q$-maatriks, siis $\mathrm{r}(\mathbf{A})\le\min(p,q)$.
3. Kui **A** ja **B** on $p\times q$-maatriksid, siis $\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\le\mathrm{r}(\mathbf{A})+\mathrm{r}(\mathbf{B})$.
4. Kui **A** on $p\times q$-maatriks ja **B** $q\times r$-maatriks, siis r(**AB**) ≤ min [r(**A**), r(**B**)].

Näide. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksi **E** astak $\mathrm{r}(\mathbf{E}) = 2$, sest kolmas rida avaldub kahe esimese rea summana ja seega ei saa lineaarselt sõltumatuid ridu olla rohkem kui kaks.

Seega ka $|\mathbf{E}| = 0$ ja pöördmaatriksit $\mathbf{E}^{-1}$ ei leidu.

1.2.8 Üldistatud pöördmaatriks

Def. Maatriksi **A** **üldistatud pöördmaatriksiks** nimetatakse maatriksit $\mathbf{A}^{-}$, mis rahuldab võrdust $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Üldistatud pöördmaatriks **ei ole üheselt määratud** ja võib olla leitud mitmel erineval viisil. Lihtsaim viis maatriksi **A** üldistatud pöördmaatriksi $\mathbf{A}^{-}$ leidmiseks on

- võtta maatriksist **A** välja maksimaalne lineaarselt sõltumatu alammaatriks (miinor) **B**,
- leida selle pöördmaatriks $\mathbf{B}^{-1}$,
- asendada maatriksis **A** miinor **B** tema pöördmaatriksiga $\mathbf{B}^{-1}$ ning kõik ülejäänud elemendid nullidega.

Näide. Eelmises näites toodud maatriksi **E** maksimaalne lineaarselt sõltumatu miinor on $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Selle pöördmaatriks $\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ ning maatriksi **E** üldistatud pöörd-maatriks $\mathbf{E}^{-}$ esitub kujul

$$\mathbf{E}^{-} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.9 Jälg

Def. Ruutmaatriksi **A** **jäljeks** tr(**A**), nimetatakse tema peadiagonaalil paiknevate elementide summat:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

Omadused

1. tr(**ABC**) = tr(**BCA**) = tr(**CAB**).
2. Kui **A** ja **B** on $n\times n$-maatriksid ja a ja b on konstandid siis $\mathrm{tr}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + b\,\mathrm{tr}(\mathbf{B})$.
3. Kui **A** ja **B** on $n\times n$-maatriksid ja leidub $\mathbf{B}^{-1}$, siis $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BAB}^{-1})$.
4. Kui **A** on idempotentne, siis $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.
5. $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 71 & 43 & 9 \\ 9 & 23 & -14 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 3 + 43 + (-14) = 32$.

1.2.10 Omaväärtused ja omavektorid *

Def. Skalaari λ nimetatakse $n\times n$-maatriksi **A** **omaväärtuseks** (ladina juureks, karakteristlikuks juureks), kui leidub selline $n\times 1$ mittenulliline vektor **x**, mis rahuldab võrdust

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x},$$

ehk teisiti üleskirjutatuna

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Seega on λ maatriksi **A** omaväärtus siis ja ainult siis, kui $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$ on singulaarne, mis tähendab et

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n| = 0.$$

Seda viimast võrrandit nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks**.

Def. Maatriksi **A** kõigi omaväärtuste hulka $\lambda_i : i = 1,...,n$ nimetatakse maatriksi **A** **spektriks**.

Def. Maatriksi **A** omaväärtusele λ vastavat mittenullilist vektorit **x** nimetatakse maatriksi **A** **omavektoriks**. S.t., et mittenulliline vektor **x** on $n\times n$-maatriksi **A** omaväärtusele λ vastav omavektor siis ja ainult siis kui ta on homogeense lineaarvõrrandisüsteemi $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{z} = \mathbf{0}$ lahendiks (**z** suhtes).

Omadused

1. Maatriksid **A** ja $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ on samade omaväärtustega.
2. Ruutmaatriksi **A** omaväärtuste summa võrdub tema jäljega ning korrutis determinandiga.
3. Sümmeetrilise maatriksi astak võrdub tema mittenulliliste omaväärtuste arvuga.
4. Kui λ on maatriksi **A** omaväärtus, siis λ^k on maatriksi $\mathbf{A}^k$ omaväärtus.
5. Olgu **B** $n\times n$-maatriks, **D** diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil paiknevad maatriksi **B** omaväärtused ning **L** $n\times n$-maatriks, mis koosneb maatriksi **B** omaväärtustele vastavatest omavektoritest. Kui **L** on mittesingulaarne, siis on maatriks **B** avaldatav kujul $\mathbf{B} = \mathbf{LDL}^{-1}$.

Näide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksile **A** vastav karakteristlik võrrand on

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0, \text{ s.t. } \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Kirjutades viimase determinandi lahti saame, et $(1-\lambda)^2 - 36 = 0$, millest maatriksi **A** omaväärtused tulevad: $\lambda_1 = -5$ ja $\lambda_2 = 7$.

Leitud omaväärtustele vastavate omavektorite leidmine pole enam nii lihtne. Siinkohal võiks vaid märkida, et kuna

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

siis on vektorid $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ning $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ omaväärtustele –5 ning 7 vastavad omavektorid

(rahuldavad võrdust $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$).

1.2.11 Üldine maatriksfunktsioonide leidmise algoritm *

Olgu maatriks **A** ruutmaatriks. Mingi maatriksfunktsioon $f(\mathbf{A})$ on kõige üldisemalt esitatav kujul

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_{11})\mathbf{Z}_{11} + f'(\lambda_{12})\mathbf{Z}_{12} + \ldots + f^{(n_1-1)}(\lambda_{1n_1})\mathbf{Z}_{1n_1} + \ldots + f(\lambda_{k1})\mathbf{Z}_{k1} + f'(\lambda_{k2})\mathbf{Z}_{k2} + \ldots + f^{(n_k-1)}(\lambda_{kn_k})\mathbf{Z}_{kn_k}$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_k} f^{(j-1)}(\lambda_{ij})\mathbf{Z}_{ij},$$

kus λ_{ij} on maatriksi **A** *i*. omaväärtus ja indeks *j* märgib selle kordsust, $f^{(j-1)}(\lambda_{ij})$ on funktsiooni f (*j*-1). tuletise väärtus kohal λ_{ij} ning $\mathbf{Z}_{ij}$ on üksnes maatriksist **A** (ja mitte funktsioonist *f*) sõltuv konstantne maatriks.

Maatriksi **A** omaväärtused leitakse võrrandist $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ ja konstantsete maatriksite $\mathbf{Z}_{ij}$ leidmiseks konstrueeritakse võimalikult lihtsatest maatriksi **A** funktsioonidest (a'la ühikteisendus $f(\mathbf{A}) = \mathbf{I}$, samasusteisendus $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, ruutteisendus $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ jne) võrrandisüsteem ülaltoodud kujul. Seejuures tuleb astmefunktsioonide $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^r$ korral **0**-maatriksist erinev vaid esimene kordseile omaväärtustele $\lambda_{i1},\ldots,\lambda_{in_i}$ vastavaist maatrikseist $\mathbf{Z}_{ij}$ ja seega $\mathbf{A}^r = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^r\mathbf{Z}_i$.

Näiteks maatriksfunktsiooni $\mathbf{P}^{1000}$ leidmiseks, kus $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, tuleb esmalt arvutada maatriksi **P** omaväärtused, lahendades järgmise võrrandi:

$$|\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad => \quad (1-\lambda)(\tfrac{1}{2}-\lambda) = 0 \quad => \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Konstantsete maatriksite $\mathbf{Z}_1$ ja $\mathbf{Z}_2$ leidmiseks tuleb konstrueerida vajalik võrrandisüsteem ja see lahendada:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{P}) = f_1(\lambda_1)\mathbf{Z}_1 + f_1(\lambda_2)\mathbf{Z}_2 \\ f_2(\mathbf{P}) = f_2(\lambda_1)\mathbf{Z}_1 + f_2(\lambda_2)\mathbf{Z}_2 \end{cases} => \begin{cases} \mathbf{I} = 1\cdot\mathbf{Z}_1 + 1\cdot\mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{P} = 1\cdot\mathbf{Z}_1 + \frac{1}{2}\cdot\mathbf{Z}_2 \end{cases} => \begin{array}{l} \frac{1}{2}\mathbf{Z}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{P} \\ \mathbf{Z}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{Z}_2 \end{array} =>$$

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Edasi saabki arvutada $\mathbf{P}^{1000}$:

$$\mathbf{P}^{1000} = \lambda_1^{1000}\mathbf{Z}_1 + \lambda_2^{1000}\mathbf{Z}_2 = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^{1000}}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^{1000}} \\ 0 & \frac{1}{2^{1000}} \end{pmatrix}.$$

Samad konstantsed maatriksid $\mathbf{Z}_1$ ja $\mathbf{Z}_2$ on kasutatavad mistahes maatriksfunktsiooni leidmiseks, sest algoritmi kohaselt tuleb vastavat funktsiooni rakendada vaid omaväärtustele.
Näiteks funktsioon $\mathbf{P}^{-2}(\mathbf{P}^2 + \mathbf{P} + \mathbf{I})$ avaldub kujul

$$\mathbf{P}^{-2}(\mathbf{P}^2 + \mathbf{P} + \mathbf{I}) = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1}{\lambda_1^2}\mathbf{Z}_1 + \frac{\lambda_2^2 + \lambda_2 + 1}{\lambda_2^2}\mathbf{Z}_2 = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 7\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

1.2.12 Ruutvormid, positiivne ja negatiivne määratus *

Def. Olgu **a** $n\times 1$-vektor ja **A** $n\times n$-maatriks. Avaldist $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ nimetatakse **lineaarvormiks** ja avaldist $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ **ruutvormiks** vektori **x** suhtes.

Seejuures võime alati eeldada, et maatriks **A** on sümmeetriline, sest kui ta seda pole, võime asendada **A** sümmeetrilise maatriksiga $(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})/2$ ning saada esialgsega võrdse ruutvormi:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)\mathbf{x}\ .$$

Def. Olgu nüüd maatriks **A** sümmeetriline. Öeldakse, et maatriks **A** on

- **positiivselt määratud** (**negatiivselt määratud**), kui $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}>0$ ($\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}<0$) iga $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ korral;
- **positiivselt poolmääratud** (**negatiivselt poolmääratud**), kui $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}\geq 0$ ($\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}\leq 0$) iga **x** korral.

Omadused

1. Kui **A** on positiivselt määratud, siis on seda ka $\mathbf{A}^{-1}$.
2. Maatriks **A** on positiivselt määratud, kui kõik tema omaväärtused on positiivsed ($\lambda_i>0$).
3. $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ ja $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ on positiivselt poolmääratud, **B** – $m\times n$-maatriks.

1.2.13 Maatrikstuletis *

Maatrikseid sisaldavate matemaatiliste avaldiste diferentseerimine järgib sarnaseid skalaare sisaldavate avaldiste diferentseerimise reegleid.

Olgu $c=3x_1+5x_2+9x_3$. Tähistades $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 9\end{pmatrix}$ ja $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}$, võib kirjutada $c=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

Et $\dfrac{\partial c}{\partial x_1}=3$, $\dfrac{\partial c}{\partial x_2}=5$ ja $\dfrac{\partial c}{\partial x_3}=9$, siis $\dfrac{\partial c}{\partial \mathbf{x}}=\begin{pmatrix}3\\5\\9\end{pmatrix}=\mathbf{b}$.

Üldine reegel on: $\dfrac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Olgu nüüd $c=9x_1^2+6x_1x_2+4x_2^2=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=:\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Et $\dfrac{\partial c}{\partial x_1}=2(9x_1)+6x_2$ ja $\dfrac{\partial c}{\partial x_2}=6x_1+2(4x_2)$, siis $\dfrac{\partial c}{\partial x}=2\begin{pmatrix}9 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=2\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Üldiselt, kui maatriks **A** on sümmeetriline, siis $\dfrac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}=2\mathbf{A}\mathbf{x}$, vastasel juhul (**A** ei ole sümmeetriline) $\dfrac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

1.3 MAATRIKSOPERATSIOONID *MS EXCELIS*

MS Excelis on olemas standardsed maaatrikstehted nagu maatrikiste liitmine ja lahutamine, skalaariga korrutamine, maatriksite korrutamine (funktsioon MMULT), transponeerimine (TRANSPOSE), pöördmaatriksi leidmine (MINVERSE) ja determinandi arvutamine (MDETERM).

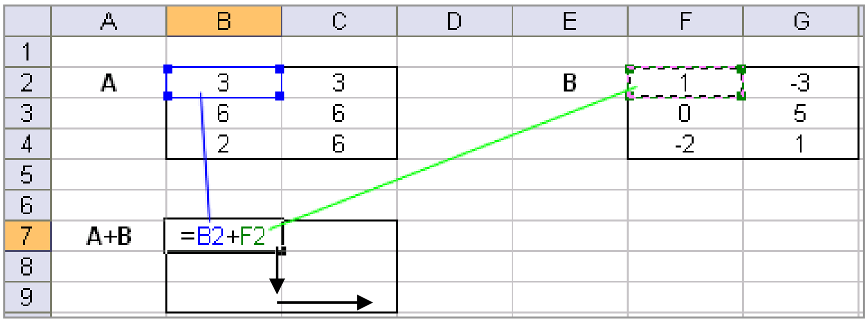
Enne tehete teostamist tuleb vajalikud maatriksid sisestada *Exceli* töölehele.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	A	3	3		B	1	-3		*k*	10
3		6	6			0	5			
4		2	6			-2	1			

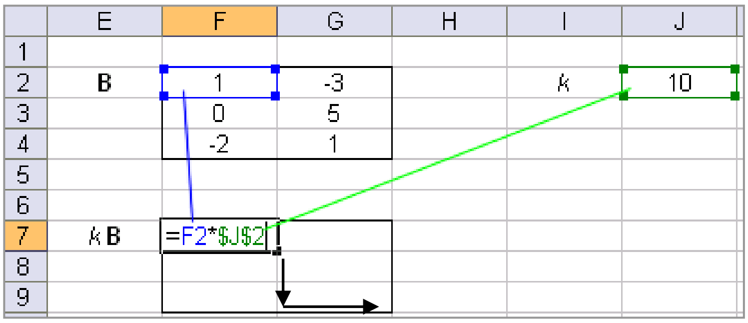
1.3.1 Maatriksite liitmine, lahutamine ja skalaariga korrutamine

Maatriksite liitmiseks, lahutamiseks ja skalaariga korrutamiseks on *Excelis* vähemalt 3 võimalust.

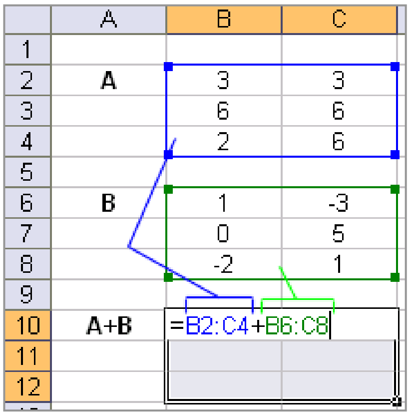
1) Esiteks võib tehted teostada elementide kaupa, summeerides, lahutades või korrutades maatriksite esimesed lahtrid ning kopeerides sisestatud valemi teistesse lahtritesse.



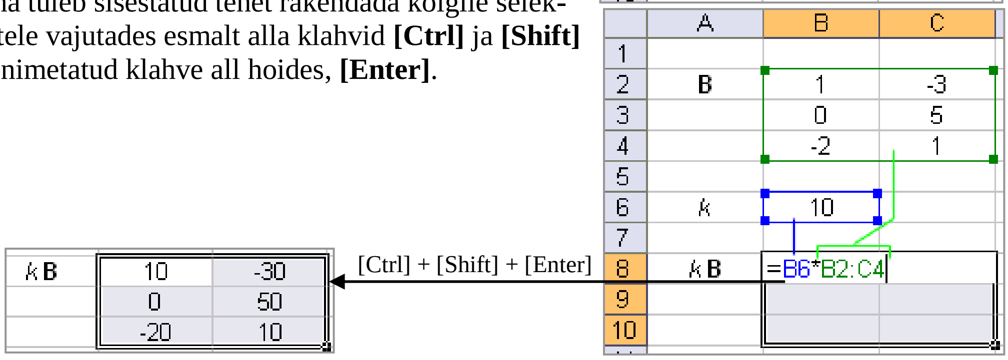
Tähele tuleb panna vaid, et skalaariga korrutamisel peab skalaari sisaldava lahtri aadress olema dollari märkide abil fikseeritud.



2) Teiseks võib kirjeldatud liitmis-, lahutamis- ja korrutamistehet rakendada tervele maatriksile korraga, saades ka tulemuseks korraga terve maatriksi (nö massiivi). Selline lähenemine osutub eelkõige vajalikuks pikemate maatrikstehete korraga ühe valemina teostamisel (vt 1.3.3).

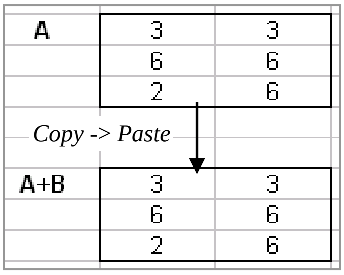


- Kõigepealt tuleb *Exceli* töölehel selekteerida tulemusmaatriksi suuruse jagu lahtreid,
- seejärel sisestada esimesse lahtrisse soovitud tehe, ja seda mitte tehtena üksiklahtrite vaid tervete maatriksite vahel;
- viimase etapina tuleb sisestatud tehet rakendada kõigile selekteeritud lahtritele vajutades esmalt alla klahvid **[Ctrl]** ja **[Shift]** ning seejärel, nimetatud klahve all hoides, **[Enter]**.

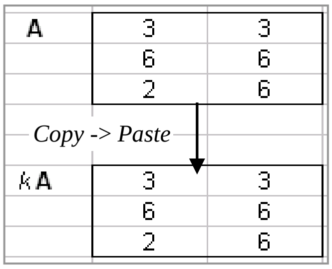


3) Alternatiivina kirjeldatud valemitele võib maatriksite liitmisel, lahutamisel ja skalaariga korrutamisel kasutada käsku <Kleebi teisiti / Paste special>. Sellel juhul tuleb

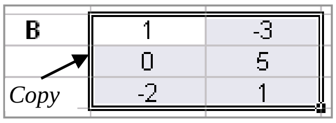
- tehte tulemuse oodatavasse asukohta kopeerida üks liidetavatest (liitmisel), vähendatav (lahutamisel) või skalaariga korrutatav maatriks,



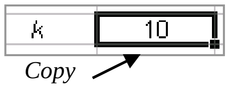
või



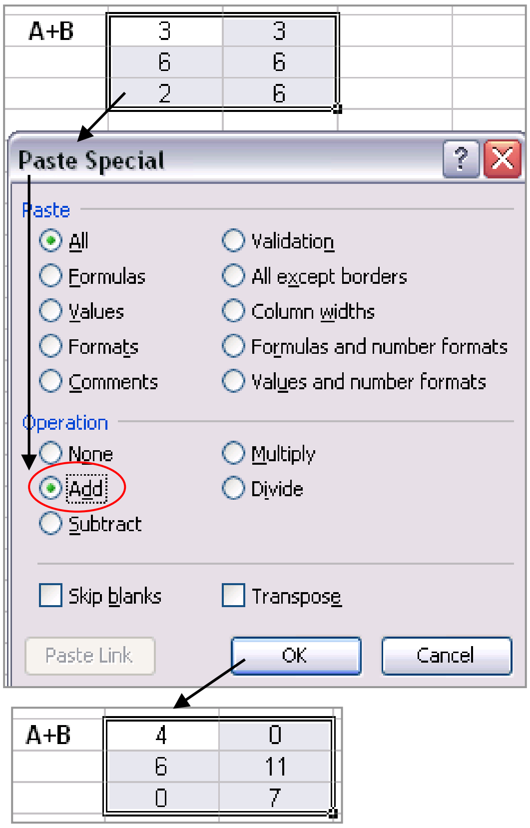
- seejärel teha koopia <Kopeeri / Copy> teisest liidetavast, vähendajast või skalaarist,



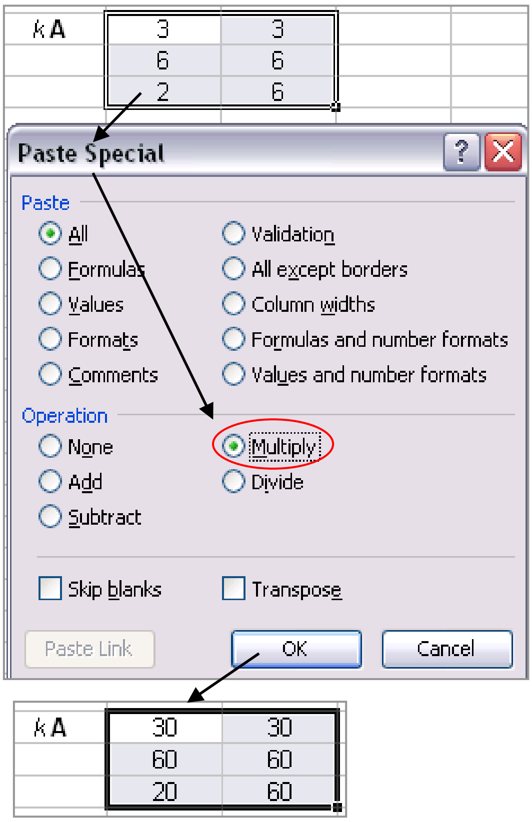
või



- võtta kleepimise asukohana blokki kogu tehte tulemuse asukohta kopeeritud maatriks ning
- rakendada käsku <Kleebi teisiti / Paste special> märkides alajaotuses <Operation> ära vastavalt valiku *Add*, *Subtract* või *Multiply*.



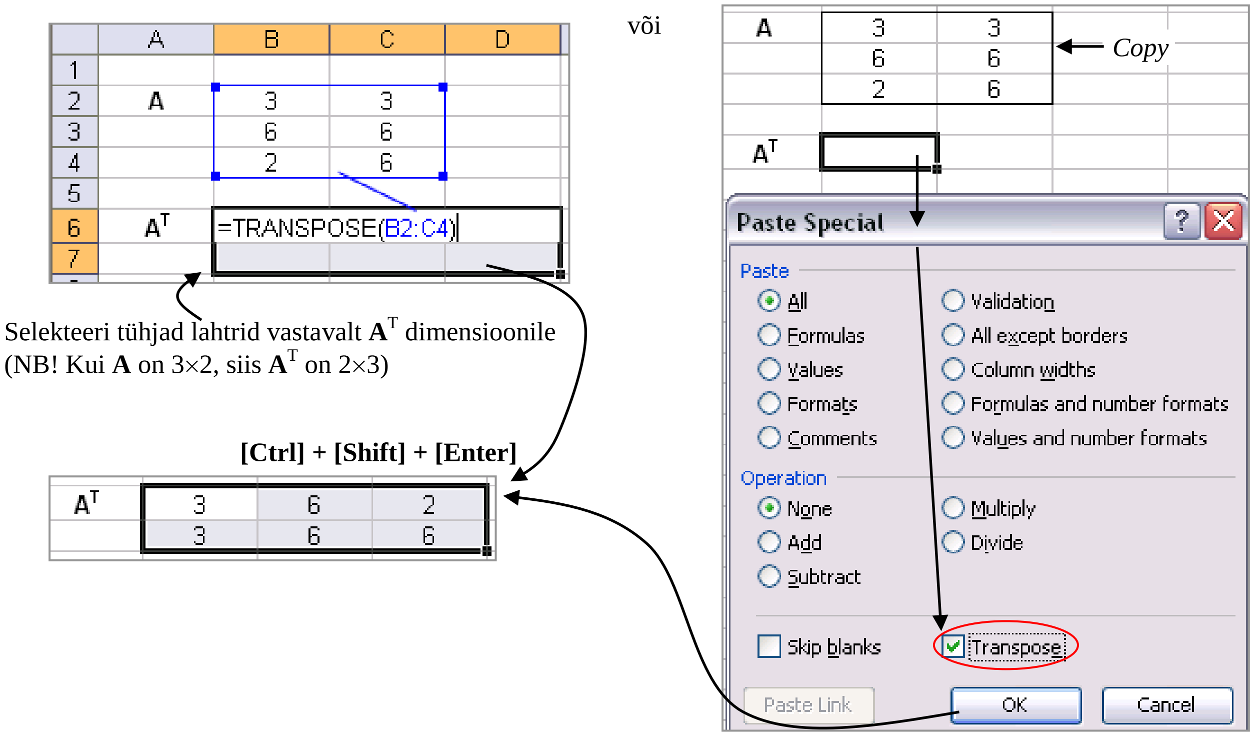
või



1.3.2 Maatriksite transponeerimine

Maatriksite transponeerimiseks saab kasutada kas

- funktsiooni TRANSPOSE või
- käsu <Kleebi teisiti / Paste special> lisavalikut *Transpose*.

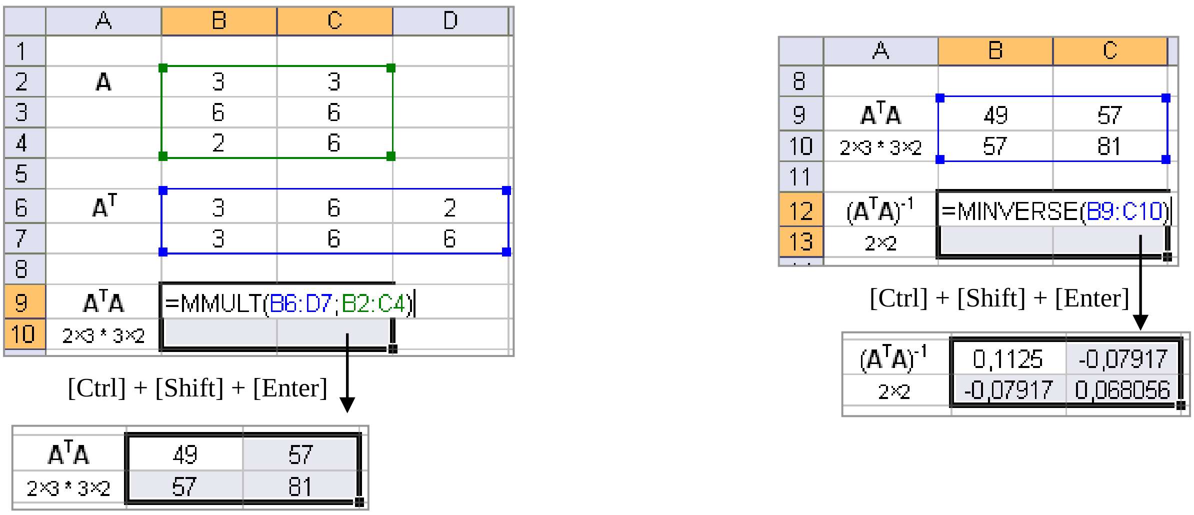


1.3.3 Maatriksite korrutamine ja pöördmaatriksi leidmine

Maatriksite korrutamine ja **pöördmaatriksi leidmine** on *Excelis* teostavad vastavalt massiivi-funktsioonide MMULT ja MINVERSE abil.

Mõlema korral tuleb

- esmalt võtta blokki tulemusmaatriksi suurune tühi tabel *Exceli* ruudustikus,
- seejärel sisestada vastav valem (või valida funktsioon *Exceli* funktsioonide hulgast $\boxed{f_x}$) ning
- rakendamaks funktsiooni kõigile selekteeritud lahtritele vajutada esmalt alla klahvid [Ctrl] ja [Shift] ning seejärel, nimetatud klahve all hoides, [Enter] (või OK).



NB! Enne maatriksite korrutamist või pöördmaatriksi leidmist tasub veenduda tehte teostatavuses, st selles, et korrutatavate maatriksite dimensioonid ikka klapivad või et pööratav maatriks ikka ruut-maatriks on.

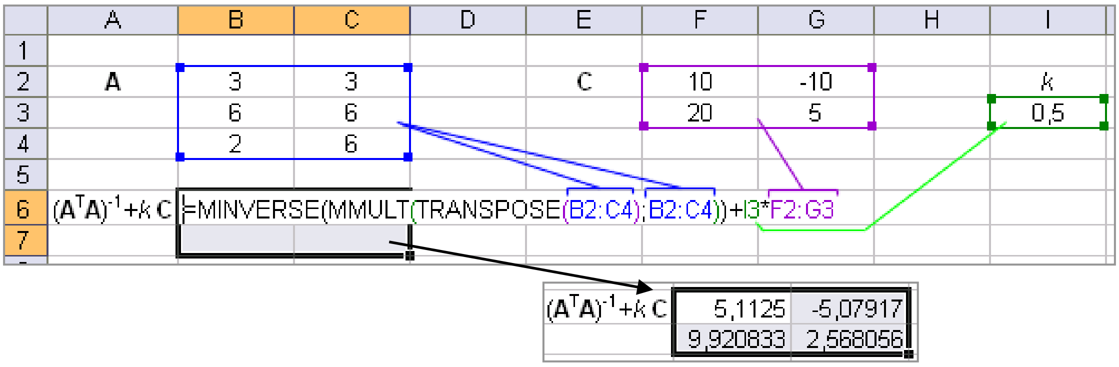
1.3.4 Tehetejärjekorrad

Kombineerides omavahel erinevaid *Exceli* maatriksfunktsioone ja -tehteid, on ühe ainsa valemiga teostavad ka keerukamad, mitmeid maatrikstehteid sisaldavad, arvutused.

Enne tehetejärjekorra sisestamist on oluline tulemusmaatriksi dimensiooni korrektne leidmine ning vastava hulga lahtrite selekteerimine. Samuti tuleb tähele panna teostatavate tehete järjekorda, st et ühe maatriksfunktsiooni argumendiks võib olla teise maatriksfunktsiooni abil arvutatud maatriks.

Näiteks maatrikstehte $\mathbf{H} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}+k\mathbf{C}$, kus $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{matrix} 10 & -10 \\ 20 & 5 \end{matrix}$ ja $k = 0{,}5$, korral on tulemusmaatriksi **H** dimensioon 2×2. Pöördmaatriksi leidmise funktsiooni MINVERSE tuleb rakendada maatrikskorrutisele (funktsiooni MMULT tulemusele), viimase argumentidest esimene on omakorda transponeerimise (funktsiooni TRANSPOSE) tulemus. Vastava tehte *Excel*'s teostamiseks tuleb

- sisestada töölehele vajalikud maatriksid,
- selekteerida tulemusmaatriksi **H** tarvis 2×2 lahtrit,
- sisestada selekteeritud lahtriblokki vajalik tehetejärjekord kasutades *Exceli* maatriksfunktsioone ja tehtemärke (esmalt viimasena teostatav tehe, selle argumentidena teised tehted, nende argumentidena vajadusel veel teised tehted jne – vt alljärgnevat joonist) ning
- [Ctrl] + [Shift] + [Enter].



1.4 PRAKTIKUM

1.4.1 Test

1. Mitu nullist erinevat elementi on 3x3 ühikmaatriksis?

   Vastuse variandid: a) 0; b) 1; c) 3; d) 9.

2. Milline on korrutismaatriksi $k\mathbf{A}$ dimensioon, kui $k = 2$ ja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?

   Vastuse variandid: a) 1x1; b) 2x2; c) 4x2; d) 2x4.

3. Milline on korrutismaatriksi $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ dimensioon, kui $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

   Vastuse variandid: a) 1x1; b) 2x2; c) 4x2; d) 2x4.

4. Milline on otsekorrutise $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ dimensioon, kui $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

   Vastuse variandid: a) 2x4; b) 4x4; c) 4x8; d) 4x16.

5. Millega võrdub $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$?

   Vastuse variandid: a) $\mathbf{A}$; b) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$; c) $\mathbf{A}^{-1}$; d) 1.

6. Millega võrdub $|\,\mathbf{I}_{3x3}\,|$ (determinant 3. järku ühikmaatriksist)?

   Vastuse variandid: a) 0; b) 1; c) 3; d) 9.

7. Millega võrdub $\mathbf{I}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{I}$ on ühikmaatriks?

   Vastuse variandid: a) $\mathbf{I}$; b) $\mathbf{I}^{-1}$; c) $\mathbf{0}$.

8. Millega võrdub $\mathbf{IA}^{-1}$, $\mathbf{I}$ on ühikmaatriks?

   Vastuse variandid: a) $\mathbf{I}$; b) $\mathbf{A}$; c) $\mathbf{A}^{-1}$.

9. Millega võrdub $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}$?

   Vastuse variandid: a) $(\mathbf{BA})^{\mathrm{T}}$; b) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$; c) $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

10. Millega võrdub $(\mathbf{AB})^{-1}$?

    Vastuse variandid: a) $(\mathbf{BA})^{-1}$; b) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$; c) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

11. Millise maatrikstehtega on avaldatav tundmatute parameetrite vektor $\mathbf{x}$ maatriksvõrdusest $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$?

    Vastuse variandid: a) $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$; b) $\mathbf{x} = \mathbf{cA}^{-1}$; c) $\mathbf{x} = \mathbf{cA}^{\mathrm{T}}$.

12. Millega võrdub $\mathrm{tr}(\mathbf{I}_{nxn})$?

    Vastuse variandid: a) 0; b) 1; c) 10; d) n.

1.4.2 Ülesanded

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Leidke $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})\mathbf{B}$ ja $\mathbf{AB} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$.

2. Näidake, et $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ on sümmeetriline.

3. * Näidake, et suvalise $p \times q$-maatriksi $\mathbf{H}$ korral korrutismaatriksid $\mathbf{HH}^{\mathrm{T}}$ ja $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}$ on sümmeetrilised.

4. Kontrollige, kas $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, kui $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Näidake, et $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -3 & 5 & -7 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$.

6. * Näidake, et 2×2-maatriksi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ korral $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.

7. Kas leidub pöördmaatriks $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$, kui $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

8. Järgnevas tabelis on toodud 5 pulli tütarde 1. laktatsiooni keskmiste näitajate erinevused populatsiooni keskmisest.

	Piim, kg	Välimiku üldhinne	Seemen-duste arv	Surnult sündide arv
Pull1	+2117	+1,5	+1,7	+0,21
Pull2	-985	+0,0	+0,7	-0,13
Pull3	+1421	+0,4	+0,2	+0,04
Pull4	-97	-1,2	-2,1	+0,05
Pull5	+1875	+0,2	-0,6	-0,07

Pulli järglaste paremus või halvemus võrreldes populatsiooni keskmisega väljendab pulli poolt järglastele pärandatavate geenide mõju.

See, kui palju ühe ühikuline erinevus mingi tunnuse osas rahaliselt väärt on, et kirjas järgnevas tabelis.

Piim, 1 kg	Välimiku hinne	Seemendus	Surnult sünd
3.- EEK	150.- EEK	-250.- EEK	-1500.- EEK

Millise maatrikstehtega saab kahe toodud tabeli (maatriksi) alusel leida korraga iga pulli poolt järglastele pärandatavate geenide (so sisuliselt spermadoosi) rahalist väärtust?

Leidke vastav väärtus iga pulli tarvis ja järjestage pullid.

9. * Leidke üldist maatriksfunktsioonide algoritmi kasutades, millega võrdub $\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-2} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M})$, kus maatriks **M** on kujul $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Teostage eelmises ülesandes toodud tehe ühe tehetejärjekorrana *MS Excelis*.

1.4.3 Testi vastused

1. c) 3
2. b) 2x2
3. c) 4x2
4. c) 4x8
5. a) **A**
6. b) 1
7. a) **I**
8. c) $\mathbf{A}^{-1}$
9. c) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
10. c) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
11. a) $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$
12. d) *n*

1.4.4 Ülesannete lahendused

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 10 & 20 \\ 8 & -2 & 22 & 18 \end{pmatrix} = \mathbf{AB} + \mathbf{A}^T\mathbf{B}$.

2. Tegelikult on see, et tulemusmaatriks on sümmeetriline, näha juba liidetavatest: mõlemad liidetavad on sümmeetrilised maatriksid. Soovi korral ja harjutamise mõttes võib muidugi maatriksid ka kokku liita:

$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 7 & 9 & 3 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. Tulemusmaatriks on sümmeetriline.

3. * Kui maatriks **H** on $p \times q$-maatriks, siis tema transponeeritud maatriks $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ on $q \times p$-maatriks, kusjuures $h_{ij} = h'_{ji}$, kus h_{ij} on maatriksi **H** *i*. reas ja *j*. veerus paiknev element ning h'_{ji} on maatriksi $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ *j*. reas ja *i*. veerus paiknev element.

   Korrutismaatriksi $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ *i*. reas ja *j*. veerus paiknev element x_{ij} avaldub kujul

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{q} h_{ik} h'_{kj} = \sum_{k=1}^{q} h_{ik} h_{jk}$$

   ning *j*. reas ja *i*. veerus paiknev element x_{ji} kujul

$$x_{ji} = \sum_{k=1}^{q} h_{jk} h'_{ki} = \sum_{k=1}^{q} h_{jk} h_{ik} \ .$$

   Seega $x_{ij} = \sum_{k=1}^{q} h_{ik} h_{jk} = x_{ji}$, iga *i* ja *j* korral. Et viimane tulemus on sümmeetrilise maatriksi tunnus, peabki korrutismaatriks $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ olema sümmeetriline.

   Analoogselt on näidatav ka korrutismaatriksi $\mathbf{Y} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}$ sümmeetrilisus.

4. Tavaline maatriksite korrutamine, tingimus tulemuse õigsuse kontrollimiseks on kirjas ülesande tekstis ($\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$).

$$\mathbf{A}^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot [2 \cdot (-5) - (-5) \cdot (-2)] + 5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot [3 \cdot (-5) - (-5) \cdot 6] - 5 \cdot (-1)^{1+3} \cdot [3 \cdot (-2) - 2 \cdot 6]$$
$$= 1 \cdot (-20) - 5 \cdot 15 - 5 \cdot (-18) = -20 - 75 + 90 = -5;$$

$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -3 & 5 & -7 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

$$= -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot [5 \cdot (-4) - (-7) \cdot 3] + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot [(-3) \cdot (-4) - (-7) \cdot (-2)] - 6 \cdot (-1)^{1+3} \cdot [(-3) \cdot 3 - 5 \cdot (-2)]$$
$$= -3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 6 \cdot 1 = -3 + 4 - 6 = -5.$$

6. * 2×2-maatriksi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ korral $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

   Seega

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \times \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & \overbrace{-a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11}}^{0} \\ \underbrace{a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21}}_{0} & -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

7. Ei leidu, sest maatriksi **X** veerud on lineaarselt sõltuvad (esimene veerg avaldub teise, kolmanda ja neljanda veeru summana).

   Muidugi võib teostada ka maatrikstehte $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ ja leida tulemuseks saadud maatriksi determinandi. Viimase 0-ga võrdumisest järeldubki pöördmaatriksi mitteleidumine:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow$$

$$\det(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}) = 3\times\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{vmatrix} = 3\times1 - 1\times1 + 1\times(-1) - 1\times(-1) = 0\,.$$

$\det(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}) = 0$, seega pöördmaatriksit $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$ ei leidu.

8. Moodustame tabelis toodud pullide tütarde keskmiste näitajate ja populatsiooni keskmiste näitajate vahelistest erinevustest maatriksi **P** (igale pullile vastab maatriksis üks rida ja igale näitajale üks veerg) ning näitajate rahalistest väärtustest reavektori **x**:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2117 & 1{,}5 & 1{,}7 & 0{,}21 \\ -985 & 0{,}0 & 0{,}7 & -0{,}13 \\ 1421 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}04 \\ -97 & -1{,}2 & -2{,}1 & 0{,}05 \\ 1875 & 0{,}2 & -0{,}6 & -0{,}07 \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \;\; 3\ \ 150\ \ -250\ \ -1500\ \ .$$

Pullide poolt järglastele pärandatavate geenide rahaliste väärtuste vektor **s** on siis esitatav maatrikskorrutisena $\mathbf{s} = \mathbf{P}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ (iga tunnuse väärtus tuleb korrutada tema rahalise väärtusega ja tulemused liita; sama tulemuse annab ka tehe $\mathbf{s} = (\mathbf{x}\mathbf{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, sest vastavalt transponeerimise 3. omadusele on need valemid samaväärsed):

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2117 & 1{,}5 & 1{,}7 & 0{,}21 \\ -985 & 0{,}0 & 0{,}7 & -0{,}13 \\ 1421 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}04 \\ -97 & -1{,}2 & -2{,}1 & 0{,}05 \\ 1875 & 0{,}2 & -0{,}6 & -0{,}07 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 150 \\ -250 \\ -1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5836 \\ -2935 \\ 4213 \\ -21 \\ 5910 \end{pmatrix}.$$

Seega on pullide järjestus järgmine: Pull5, Pull1, Pull3, Pull4, Pull2.

Seejuures pärandavad pullid 5, 1 ja 3 järglastele geneetilise potentsiaali tuua omanikele populatsiooni keskmisega võrreldes enam kasu ning pullid 2 ja 4 pärandavad järglastele geneetilise potentsiaali tuua omanikele populatsiooni keskmisega võrreldes vähem kasu.

9. * Leiame esmalt maatriksi $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ omaväärtused, lahendades järgmise võrrandi:

$$|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\; => \;\; -(2-\lambda)(1+\lambda) = 0 \;\; => \;\; \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \;\; => \;\; \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1\,.$$

Konstantsete maatriksite $\mathbf{Z}_1$ ja $\mathbf{Z}_2$ leidmiseks tuleb konstrueerida vajalik võrrandisüsteem ja see lahendada:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{P}) = f_1(\lambda_1)\mathbf{Z}_1 + f_1(\lambda_2)\mathbf{Z}_2 \\ f_2(\mathbf{P}) = f_2(\lambda_1)\mathbf{Z}_1 + f_2(\lambda_2)\mathbf{Z}_2 \end{cases} \;\; => \;\; \begin{cases} \mathbf{I} = 1\cdot\mathbf{Z}_1 + 1\cdot\mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{M} = 2\cdot\mathbf{Z}_1 - 1\cdot\mathbf{Z}_2 \end{cases} \;\; => \;\; \begin{matrix} \mathbf{Z}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{Z}_2 \\ 3\mathbf{Z}_2 = 2\mathbf{I} - \mathbf{M} \end{matrix} \;\; =>$$

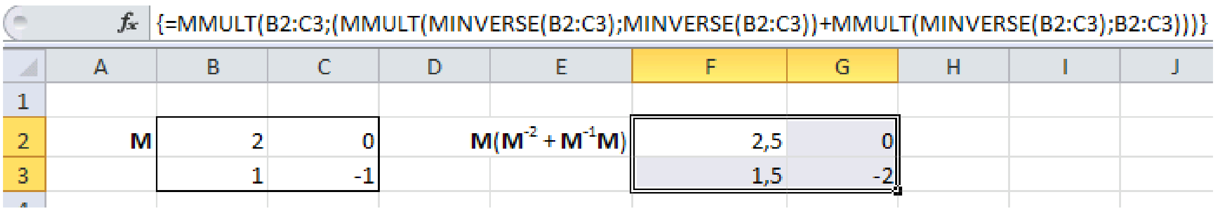
$$\mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\tfrac{1}{3} & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Edasi saabki arvutada $\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-2} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M})$:

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-2} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}) = \lambda_1\ \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1}\ \mathbf{Z}_1 + \lambda_2\ \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2}\ \mathbf{Z}_2 = \frac{5}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\tfrac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tfrac{1}{2} & 0 \\ 1\tfrac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

10. Paiknegu maatriks **M** *Excel*'i töölehel lahtrites B2:C3. Tehte $\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-2} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M})$ tulemusmaatriks on siis leitav tehetejärjekorraga

=MMULT(B2:C3;(MMULT(MINVERSE(B2:C3);MINVERSE(B2:C3))
+MMULT(MINVERSE(B2:C3);B2:C3)))



1.5 KODUSED ÜLESANDED

1. Olgu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Leidke $\mathbf{AC}^{\mathrm{T}}$ ja $(\mathbf{CA}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Mida saate tulemuste kohta öelda? Miks see nii on?

   b) Leidke r($\mathbf{A}$) ja r($\mathbf{B}$).

   c) Leidke det($\mathbf{A}$) ja det($\mathbf{B}$). Kas leidub $\mathbf{A}^{-1}$ ja $\mathbf{B}^{-1}$? Miks?

   d) Leidke $\mathbf{A}^{-1}$. Kontrollige, kas kehtib $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.

   e) Leidke tr($\mathbf{B}$) ja tr($\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$). Mida saate tulemuste kohta öelda? Miks see nii on?

   f) Lahendage ülesanded a), c) ja d) *MS Excelis* kasutades *Exceli* maatriksfunktsioone.

2. Lahendage võrrandissüsteem $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y - z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 10 \end{cases}$. Maatrikstehted võite teostada *MS Excelis*.

3. Järgnevas tabelis on toodud nelja koera kohad kolmel võistlusel.

	Võistlus		
	A	B	C
Koer 1	1	4	1
Koer 2	2	2	4
Koer 3	3	3	2
Koer 4	4	1	3

Võistluste kaalukust näitavad osakaalud järgmises tabelis.

	Võistlus		
	A	B	C
Osakaal	0,2	0,5	0,3

Moodustage võistlustel saadud kohtadest maatriks $\mathbf{X}$ ja võistluste osakaaludest maatriks (reavektor) $\mathbf{c}$.

   a) Millise maatrikstehtega saab kahe toodud tabeli (maatriksi) alusel leida korraga kõigi koerte võistlustulemuste kaalutud keskmist (kaalutud keskmiste vektorit $\mathbf{y}$)?

   b) Leidke võistlustulemuste kaalutud keskmised ja järjestage koerad (tehted võite teostada *MS Excelis*)

   c) Muutke võistluste osakaale (tekitage uus võistluste osakaalude vektor) nii, et kokkuvõttes parim koer langeks viimaseks.

NB! *Excelis* teostatud lahendused saatke õppejõule e-mailiga, ülejäänu (koos *Excelist* välja kirjutatud tulemustega) esitage paberil.