# I

# SISSEJUHATUS MAATRIKSALGEBRASSE

## 1.1 DEFINITSIOONID

### 1.1.1 Maatriks, vektor, skalaar

**Maatriksiks** nimetatakse ridadesse ja veergudesse (tabelisse) paigutatud elementide hulka. **Elementideks** võivad olla arvud, matemaatilised avaldised, teised maatriksid. Maatrikseid tähistatakse tavaliselt trükitähtedega ja nende elemente vastavate kirjatähtedega, lisades vajadusel indeksid.

**N**äiteks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ või $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Maatriksi **dimensiooniks** (**järguks**, **suuruseks**) nimetatakse tema ridade ja veergude arvu.

**N**äiteks ülaltoodud maatriks **A** on 2×3-maatriks.

Vahel näidatakse maatriksi järk ära alumises indeksis - $\mathbf{A}_{2\times 3}$.

**Vektoriks** nimetatakse maatriksit, millel on vaid üks rida või üks veerg, ja kõneldakse siis vastavalt rea- või veeruvektorist. Kui pole täpselt määratletud, kas on tegu rea- või veeruvektoriga, mõistetakse vektori all veeruvektorit. Vektori elementide tähistamisel kasutatakse vaid üht indeksit.

**N**äiteks $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

**Skalaariks** nimetatakse maatriksit, millel on 1 rida ja 1 veerg, s.t. 1×1-maatriksit.

**N**äiteks $\lambda = 1$.

### 1.1.2 Erikujulised maatriksid

**Ruutmaatriksiks** nimetatakse maatriksit, mille ridade ja veergude arv on võrdsed. Vastasel juhul on tegu **ristkülikmaatriksiga**. Kõik vektorid on ristkülikmaatriksid.

**Diagonaalmaatriksiks** nimetatakse ruutmaatriksit, mille kõik väljaspool peadiagonaali paiknevad elemendid võrduvad nulliga ($d_{ij} = 0$, kui $i \neq j$).

**N**äiteks $\mathbf{D}_{n\times n} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$ või $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

**Ühikmaatriksiks** nimetatakse diagonaalmaatriksit, mille peadiagonaali elemendid võrduvad ühega. Ühikmaatriksit tähistatakse:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ruutmaatriksit, mille kõik elemendid allpool (ülalpool) peadiagonaali võrduvad nulliga, nimetatakse **alumiseks** (**ülemiseks**) **kolmnurkmaatriksiks**.

**N**äiteks maatriksid $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ on vastavalt ülemine ja alumine kolmnurkmaatriks.

**Sümmeetriline** maatriks on ruutmaatriks, mille ülalpool peadiagonaali paiknevad elemendid on võrdsed vastavate allpool peadiagonaali paiknevate elementidega, s.t. element $a_{ij}$ on võrdne elemendiga $a_{ji}$.

**N**äiteks maatriks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ on sümmeetriline, sest $a_{12} = a_{21} = 6$, $a_{13} = a_{31} = 8$ ja $a_{23} = a_{32} = 3$.

### 1.1.3 Blokkmaatriksid

**Blokkmaatriksiks** nimetatakse maatriksit, mille elementideks on omakorda maatriksid.

**N**äiteks $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{d} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, kus $\mathbf{a} = (3)$, $\mathbf{b} = (1\ \ 2)$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

## 1.2 Maatriksoperatsioonid

### 1.2.1 Liitmine ja lahutamine

Kahte maatriksit saab **liita** ja **lahutada** vaid siis, kui neil on sama arv ridu ja veerge, s.t. nad on sama järku. Maatrikseid liidetakse ja lahutatakse elementide kaupa. Seega, kui maatriks **C** = **A** + **B** ja **E** = **A** – **B**, siis $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ja $e_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

---

**N**äide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 40 & 21 \\ 35 & -20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 32 \end{pmatrix}$.

Siis $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 40+7 & 21+5 \\ 35+(-6) & -20+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 26 \\ 29 & 12 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 40-7 & 21-5 \\ 35-(-6) & -20-32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 16 \\ 41 & -52 \end{pmatrix}$.

---

### 1.2.2 Korrutamine

Maatriksi **korrutamisel skalaariga** korrutatakse sellega läbi maatriksi iga element.

**N**äide. $k = 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 40 & 21 \\ 35 & -20 \end{pmatrix}$. Siis $k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\times 40 & 2\times 21 \\ 2\times 35 & 2\times(-20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 42 \\ 70 & -40 \end{pmatrix}$.

Kahte maatriksit saab **omavahel korrutada**, kui esimese maatriksi veergude arv on võrdne teise maatriksi ridade arvuga. Korrutismaatriksi ridade arv on võrdne esimese maatriksi ridade arvuga ja veergude arv teise maatriksi veergude arvuga – $\mathbf{C}_{n\times m} = \mathbf{A}_{n\times k}\mathbf{B}_{k\times m}$. Korrutismaatriksi element kohal *ij* (reas *i* veerus *j*) leitakse kui esimese maatriksi *i*-nda rea ja teise maatriksi *j*-nda veeru vastavate elementide korrutiste summa – $c_{ij} = \sum_{h=1}^{k} a_{ih}b_{hj}$.

---

**N**äide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksi **C = AB** elemendid leitakse järgmiselt:

$c_{11} = 1\cdot 2 + 4\cdot 4 + (-1)\cdot 6 = 12$ (maatriksi **A** 1. rida korrutatuna maatriksi **B** 1. veeruga),
$c_{21} = 2\cdot 2 + 5\cdot 4 + 0\cdot 6 = 24$ (**A** 2. rida korrutatuna **B** 1. veeruga),
$c_{31} = 3\cdot 2 + 6\cdot 4 + 1\cdot 6 = 36$ (**A** 3. rida korrutatuna **B** 1. veeruga),
$c_{12} = 1\cdot 5 + 4\cdot 3 + (-1)\cdot 1 = 16$ (**A** 1. rida korrutatuna **B** 2. veeruga),
$c_{22} = 2\cdot 5 + 5\cdot 3 + 0\cdot 1 = 25$ (**A** 2. rida korrutatuna **B** 2. veeruga),
$c_{23} = 3\cdot 5 + 6\cdot 3 + 1\cdot 1 = 34$ (**A** 3. rida korrutatuna **B** 2. veeruga).

Seega $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 25 \\ 36 & 34 \end{pmatrix}$.

Seejuures on maatriks **C** 3×2-maatriks, kus 3 on maatriksi **A** ridade arv ja 2 on maatriksi **B** veergude arv.

**Omadused**

1. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
2. $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$, kus **I** on ühikmaatriks.
3. $\mathbf{ABC} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.
4. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

### 1.2.3 Maatriksite otsekorrutis

Maatriksite $\mathbf{G}_{n\times m}$ ja $\mathbf{A}_{t\times s}$ **otsekorrutiseks** (**Kroneckeri korrutiseks**) nimetatakse maatriksit

$$\mathbf{G} \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} g_{11}\mathbf{A} & g_{12}\mathbf{A} & \cdots & g_{1m}\mathbf{A} \\ g_{12}\mathbf{A} & g_{22}\mathbf{A} & \cdots & g_{2m}\mathbf{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}\mathbf{A} & g_{n2}\mathbf{A} & \cdots & g_{nm}\mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Saadud korrutismaatriks on järku $nt\times ms$.

**N**äide. $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 40 & 0 & 5 & 20 \\ 10 & 40 & 10 & 5 & 20 & 5 \\ 5 & 0 & 10 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 5 & 20 & 0 & 20 & 80 \\ 5 & 20 & 5 & 20 & 80 & 20 \end{pmatrix}$.

Otsekorrutis leiab rakendust mitmemõõtmelisel analüüsil, s.t. kui soovitakse korraga hinnata faktorite mõju enam kui ühele tunnusele (näiteks geneetilise korrelatsiooni arvutamisel).

### 1.2.4 Transponeerimine, ortogonaalsed ja idempotentsed maatriksid

Maatriksi **A** **transponeeritud** maatriks, mida tähistatakse tavaliselt **A**' või $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, saadakse, vahetades esialgse maatriksi read ja veerud, s.t. kui $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, siis $b_{ji} = a_{ij}$.

**N**äide. Kui $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, siis $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Omadused**

1. Kui **A** on sümmeetriline, siis $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.
3. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Maatriksit nimetatakse **idempotentseks**, kui tema korrutis iseendaga annab tulemuseks iseenda, s.t. maatriks **A** on idempotentne, kui $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$. Vaid ruutmaatriks saab olla idempotentne.

**Ortogonaalne** maatriks on ruutmaatriks, mille korrutis oma transponeeritud maatriksiga võrdub ühikmaatriksiga – maatriks **U** on ortogonaalne, kui $\mathbf{UU}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

### 1.2.5 Determinant

Olgu maatriks **A** 2×2-maatriks. Tema **determinandiks** nimetatakse suurust $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Vahel tähistatakse determinanti ka det(**A**). Enam kui kahedimensionaalse ruutmaatriksi determinant on leitav valemist

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|,$$

kus $\mathbf{A}_{ij}$ on maatriksi **A** alammaatriks, mis on saadud esialgsest maatriksist *i*. rea ja *j*. veeru ärajätmise tulemusena. Sellist alammaatriksit nimetatakse **miinoriks**.

Maatriksit nimetatakse **singulaarseks**, kui tema determinant võrdub nulliga ja **mittesingulaarseks**, kui tema determinant on nullist suurem.

**Omadused**

1. $|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$.
2. Kui maatriksid **A** ja **B** on sama järku ruutmaatriksid, siis $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.
3. $|\alpha\mathbf{A}|=\alpha^n|\mathbf{A}|$, **A** on $n\times n$-maatriks ja $\alpha$ suvaline skalaar.
4. $|\mathbf{I}_n|=1$.
5. Kui maatriks sisaldab kahte või enamat võrdset rida või veergu, siis tema determinant võrdub nulliga.
6. Diagonaalmaatriksi determinant võrdub tema diagonaalielementide korrutisega, s.t. kui

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}, \text{ siis } |\mathbf{D}|=\prod_{i=1}^{n} d_{ii}.$$

---

**Näide.** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Võttes $i=1$, s.t. kasutades arvutamisel maatriksi **A** esimese rea elemente ja nendele vastavaid miinoreid, avaldub determinant kujul

$$|\mathbf{A}|=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=\left[1\cdot(3-4)\right]-\left[1\cdot(1-2)\right]+\left[1\cdot(2-3)\right]=-1.$$

Sama tulemuse saaksime ka teisi ridasid (s.t. $i=2$ või 3) aluseks võttes, samuti kasutades rea asemel veergu ja sellele vastavaid miinoreid.

---

### 1.2.6 Pöördmaatriks

Maatriksi **A** **pöördmaatriks** $\mathbf{A}^{-1}$ on maatriks, millega esialgset maatriksit vasakult või paremalt korrutades on tulemuseks ühikmaatriks – $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{I}$ ja $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$. Pöördmaatriks leidub igal mittenullilise determinandiga (mittesingulaarsel) ruutmaatriksil.

Üldine valem maatriksi **A** pöördmaatriksi $\mathbf{A}^{-1}$ elementide leidmiseks on järgmine

$$a_{ij}^{-1}=\frac{(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|}{|\mathbf{A}|},$$

kus $a_{ij}^{-1}$ tähistab maatriksi $\mathbf{A}^{-1}$ *ij*.-t elementi ja $\mathbf{A}_{\mathrm{ij}}$ on maatriksi **A** *ij*. miinor.

Kui A on 2×2-maatriks, avaldub tema pöördmaatriks kujul

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

**Näide.** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{8\cdot 4-6\cdot 4}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}75 & 1 \end{pmatrix}$.

Pöördmaatriks leiab rakendust näiteks **lineaarvõrranditesüsteemide lahendamisel**: korrutades maatriksvõrduse

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{c}$$

mõlemad pooled vasakult läbi kordajate maatriksi **A** pöördmaatriksiga, saame lahendivektori **x** kujul

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}.$$

---

**N**äide. Olgu meil tarvis lahendada lineaarvõrranditesüsteem $\begin{cases} -x+3y=7 \\ 2y+z=13 \\ x+4z=5 \end{cases}$.

Sama süsteem maatrikskujul on $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$,

millest $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}6 & 2{,}4 & -0{,}6 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

ehk $x=17$, $y=8$ ja $z=-3$.

---

**Omadused**

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
2. $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$, kui **A** on mittesingulaarne.
3. $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.
4. $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$; **A**, **B**, **C** - mittesingulaarsed.
5. Diagonaalmaatriksi pöördmaatriks on samuti diagonaalmaatriks, kusjuures tema diagonaalielementideks on esialgse maatriksi diagonaalielementide pöördelemendid, s.t. kui

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}, \text{ siis } \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/d_{nn} \end{pmatrix}.$$

### 1.2.7 Lineaarne sõltumatus ja maatriksi astak

Maatriksit **A** nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui ei leidu ühtki vektorit **k** peale nullvektori **0**, mille korral **Ak** = **0**.

Maatriksi **astakuks** nimetatakse tema maksimaalset lineaarselt sõltumatute ridade või veergude arvu. Maatriksi **A** astakut tähistatakse r(**A**). Kui ruutmaatriksi astak võrdub tema ridade või veergude arvuga, siis öeldakse, et maatriks on **täisastakuga**.

Kui ruutmaatriks ei ole täisastakuga, siis tema determinant võrdub nulliga ja pöördmaatriksit ei eksisteeri.

**Omadused**

1. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.
2. Kui **A** on $p\times q$-maatriks, siis $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \le \min(p, q)$.
3. Kui **A** ja **B** on $p\times q$-maatriksid, siis $\mathrm{r}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A}) + \mathrm{r}(\mathbf{B})$.
4. Kui **A** on $p\times q$-maatriks ja **B** $q\times r$-maatriks, siis $\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \le \min\left[\mathrm{r}(\mathbf{A}), \mathrm{r}(\mathbf{B})\right]$.

---

**N**äide. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksi **E** astak $\mathrm{r}(\mathbf{E}) = 2$, sest kolmas rida avaldub kahe esimese rea summana ja seega ei saa lineaarselt sõltumatuid ridu olla rohkem kui kaks. Seega ka $|\mathbf{E}| = 0$ ja pöördmaatriksit $\mathbf{E}^{-1}$ ei leidu.

---

### 1.2.8 Üldistatud pöördmaatriks

Maatriksi **A** **üldistatud pöördmaatriksiks** nimetatakse maatriksit $\mathbf{A}^{-}$, mis rahuldab võrdust $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Üldistatud pöördmaatriks **ei ole üheselt määratud** ja võib olla leitud mitmel erineval viisil. Lihtsaim viis maatriksi **A** üldistatud pöördmaatriksi $\mathbf{A}^{-}$ leidmiseks on

- võtta maatriksist **A** välja maksimaalne lineaarselt sõltumatu alammaatriks (miinor) **B**,
- leida selle pöördmaatriks $\mathbf{B}^{-1}$,
- asendada maatriksis **A** miinor **B** tema pöördmaatriksiga $\mathbf{B}^{-1}$ ning kõik ülejäänud elemendid nullidega.

---

**N**äide. Eelmises näites toodud maatriksi **E** maksimaalne lineaarselt sõltumatu miinor on $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Selle pöördmaatriks $\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ ning maatriksi **E** üldistatud pöördmaatriks $\mathbf{E}^{-}$ esitub kujul

$$\mathbf{E}^{-} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

### 1.2.9 Jälg

Ruutmaatriksi **A** <u>jäljeks</u> tr(**A**), nimetatakse tema peadiagonaalil paiknevate elementide summat:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

**Omadused**

1. $\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BCA}) = \mathrm{tr}(\mathbf{CAB})$.
2. Kui **A** ja **B** on $n\times n$-maatriksid ja $a$ ja $b$ on konstandid siis $\mathrm{tr}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + b\,\mathrm{tr}(\mathbf{B})$.
3. Kui **A** ja **B** on $n\times n$-maatriksid ja leidub $\mathbf{B}^{-1}$, siis $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BAB}^{-1})$.
4. Kui **A** on idempotentne, siis $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.
5. $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.

**N**äide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 71 & 43 & 9 \\ 9 & 23 & -14 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 3 + 43 + (-14) = 32$.

### 1.2.10 Omaväärtused ja omavektorid

Skalaari $\lambda$ nimetatakse $n\times n$-maatriksi **A** **omaväärtuseks** (ladina juureks, karakteristlikuks juureks), kui leidub selline $n\times 1$ mittenulliline vektor **x**, mis rahuldab võrdust

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}\,,$$

ehk teisiti üleskirjutatuna

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}\ .$$

Seega on $\lambda$ maatriksi **A** omaväärtus siis ja ainult siis, kui $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$ on singulaarne, mis tähendab et

$$|\,\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n\,| = 0\ .$$

Seda viimast võrrandit nimetatakse **karakteristlikuks võrrandiks**.

Maatriksi **A** kõigi omaväärtuste hulka $\{\lambda_i : i = 1,\dots,n\}$ nimetatakse maatriksi **A** **spektriks**.

Maatriksi **A** omaväärtusele $\lambda$ vastavat mittenullilist vektorit **x** nimetatakse maatriksi **A** **omavektoriks**. S.t., et mittenulliline vektor **x** on $n\times n$-maatriksi **A** omaväärtusele $\lambda$ vastav omavektor siis ja ainult siis kui ta on homogeense lineaarvõrrandisüsteemi $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{z} = \mathbf{0}$ lahendiks (**z** suhtes).

**Omadused**

1. Maatriksid **A** ja $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ on samade omaväärtustega.
2. Ruutmaatriksi **A** omaväärtuste summa võrdub tema jäljega ning korrutis determinandiga.

3. Sümmeetrilise maatriksi astak võrdub tema mittenulliliste omaväärtuste arvuga.
4. Kui $\lambda$ on maatriksi **A** omaväärtus, siis $\lambda^k$ on maatriksi $\mathbf{A}^k$ omaväärtus.
5. Olgu **B** $n\times n$-maatriks, **D** diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil paiknevad maatriksi **B** omaväärtused ning **L** $n\times n$-maatriks, mis koosneb maatriksi **B** omaväärtustele vastavatest omavektoritest. Kui **L** on mittesingulaarne, siis on maatriks **B** avaldatav kujul $\mathbf{B} = \mathbf{LDL}^{-1}$.

---

**N**äide. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Maatriksile **A** vastav karakteristlik võrrand on

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0, \text{ s.t. } \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0.$$

Kirjutades viimase determinandi lahti saame, et $(1-\lambda)^2 - 36 = 0$, millest maatriksi **A** omaväärtused tulevad: $\lambda_1 = -5$ ja $\lambda_2 = 7$.

Leitud omaväärtustele vastavate omavektorite leidmine pole enam nii lihtne. Siinkohal võiks vaid märkida, et kuna

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

siis on vektorid $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ning $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ omaväärtustele –5 ning 7 vastavad omavektorid (rahuldavad võrdust $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$).

---

### 1.2.11 Ruutvormid, positiivne ja negatiivne määratus

Olgu **a** $n\times 1$-vektor ja **A** $n\times n$-maatriks. Avaldist $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ nimetatakse **lineaarvormiks** ja avaldist $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}$ **ruutvormiks** vektori **x** suhtes.

Seejuures võime alati eeldada, et maatriks **A** on sümmeetriline, sest kui ta seda pole, võime asendada **A** sümmeetrilise maatriksiga $(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})/2$ ning saada esialgsega võrdse ruutvormi:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)\mathbf{x}.$$

Olgu nüüd maatriks **A** sümmeetriline. Öeldakse, et maatriks **A** on

- **positiivselt määratud** (**negatiivselt määratud**), kui $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} > 0$ ($\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} < 0$) iga $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ korral;
- **positiivselt poolmääratud** (**negatiivselt poolmääratud**), kui $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} \geq 0$ ($\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} \leq 0$) iga **x** korral.

**Omadused**

1. Kui **A** on positiivselt määratud, siis on seda ka $\mathbf{A}^{-1}$.
2. Maatriks **A** on positiivselt määratud, kui kõik tema omaväärtused on positiivsed ($\lambda_i > 0$).
3. $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ ja $\mathbf{BB}^{\mathrm{T}}$ on positiivselt poolmääratud, **B** – $m\times n$-maatriks.

### 1.2.12 Maatrikstuletis

Maatrikseid sisaldavate matemaatiliste avaldiste diferentseerimine järgib sarnaseid skalaare sisaldavate avaldiste diferentseerimise reegleid.

Olgu $c = 3x_1 + 5x_2 + 9x_3$. Tähistades $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, võib kirjutada $c = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

Et $\frac{\partial c}{\partial x_1} = 3$, $\frac{\partial c}{\partial x_2} = 5$ ja $\frac{\partial c}{\partial x_3} = 9$, siis $\frac{\partial c}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$.

Üldine reegel on: $\frac{\partial \mathbf{Ax}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Olgu nüüd $c = 9x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =: \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Et $\dfrac{\partial c}{\partial x_1} = 2(9x_1) + 6x_2$ ja $\dfrac{\partial c}{\partial x_2} = 6x_1 + 2(4x_2)$, siis $\dfrac{\partial c}{\partial x} = 2\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Üldiselt, kui maatriks **A** on sümmeetriline, siis $\dfrac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$, vastasel juhul (**A** ei ole sümmeetriline) $\dfrac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

## 1.3 ÜLESANDED

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Näidake, et $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 10 & 20 \\ 8 & -2 & 22 & 18 \end{pmatrix} = \mathbf{AB} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$.
2. Millega võrdub $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$?
3. Näidake, et $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ on sümmeetriline.
4. Näidake, et suvalise $p \times q$-maatriksi **H** korral korrutismaatriksid $\mathbf{HH}^{\mathrm{T}}$ ja $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}$ on sümmeetrilised.
5. Kontrollige, kas $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, kui $\mathbf{A} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Millega võrdub $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$?
7. Näidake, et $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ -3 & 5 & -7 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$.
8. Näidake, et 2×2-maatriksi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ korral $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.
9. Leidke $\mathrm{tr}(\mathbf{I}_{n \times n})$.
10. Kontrollige, kas omaväärtuste ja -vektorite peatüki lõpus toodud näite korral kehtib omadus $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^{-1}$, kus 2×2-maatriks **L** koosneb maatriksi **A** omavektoritest ja maatriks **D** on maatriksi A omaväärtuste diagonaalmaatriks.