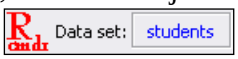
Praktikum 5
R – lineaarsed mudelid, kontrastid.

Tänane ja ka järgmine praktikumi püüavad anda pisikese ülevaate statistilisest modelleerimisest lineaarsete mudelite abil. Üldised lineaarsed mudelid (*GLM*, *general linear models*) kujutavad enesest eksperimendipõhises statistikas kasutatavate traditsiooniliste meetodite nagu t-test, regressioon- ja dispersioonanalüüs edasiarendust, mistap tähendab ka nimetatud meetodite rakendamine tegelikult statistilist modelleerimist. Aga erinevalt tavastatistikast, kus konstrueeritud mudelid ja kontrollitavad hüpoteesid on enamasti selgelt paigas, kaasneb üldisemate mudelite rakendamisega sageli palju mängimist ja proovimist ning lõpptulemus võib tegelike andmetes peituvate seoste kõrval sõltuda märksa enam uurija enese ettekujutusest võimalikest seostest ja struktuuridest oma andmeis ning oskusest seda kõike matemaatilise mudelina esitada. Seetõttu ei ole üldiste lineaarsete mudelite rakendamisel tihti esmatähtis mingite mõjude või seoste statistilise olulisuse testimine (kuigi enamasti, aga mitte alati, jõutakse ka selleni, aga siis ka pigem mõttega, et kas on alust mingi faktori tasemeid või ühte mudelit teisest erinevaks lugeda), vaid hoopis mudeli parameetrite (erinevate faktorite mõjude suuruse) hindamine ja olemuse tõlgendamine.

Kuigi selle kursuse raames ei jõua mudelitest väga palju rääkida, võite huvi korral silmad üle lasta järgmisest loengukonspektist: http://www.eau.ee/~ktanel/VL_0192/pt6_2010.pdf
(mis on küll osa loomade aretusväärtuste hindamise kursusest ja seeläbi kohati pisut spetsiifiline, hõlmates siiski küllalt suure osa üldiste lineaarsete mudelite olemusest).

1.

- Avage *R*, seejärel möödunud praktikumi lõpus salvestatud .RData-fail (*Load Workspace …*) – kui on, mida avada –, ja käivitage lisamoodul *Rcmdr* (näiteks käsuga `library(Rcmdr)`).

  Kui teil oli *R*-i *Workspace*, mida avada ja see sisaldas ka vajalikku tudengite andmefaili, fikseerige nimetatud fail: 

;

- või siis importige nimetatud fail

(näiteks käsuga: `students = read.csv("http://www.eau.ee/~ktanel/DK_0007/studentsR.csv", header=TRUE, sep=";", dec=",")`

  ja fikseerige siis.

- Veel ühe alternatiivina võite kursuse kodulehelt salvestada tudengite andmestiku *Excel*'i failina ja importida selle siis *R Commander*'isse (*Data -> Import data -> from Excel, Access or dBase data set…*).

2.

Ükskõik, kas möödunud nädalal tegelesite sellega või mitte, püüdke sissejuhatuseks prognoosida tudengite peaümbermõõtu, kusjuures eesmärgiks võiks olla saada nii hea mudel peaümbermõõdu prognoosimiseks, kui võimalik.

2.1.

Mäletatavasti oli tudengite peaümbermõõt tugevamini seotud kaaluga kui pikkusega (kui ei usu või mäleta, leidke uuesti näiteks korrelatsioonikordajad).

Seega võikski esmalt prognoosidagi peaümbermõõtu kaalu alusel.

a) Et regressioonivõrrand on samuti üldine lineaarne mudel, on regressioonanalüüs teostav ka üldiste lineaarsete mudelite konstrueerimiseks mõeldud funktsiooni `lm` abil:

```
peaymb_GLM.1 <- lm(peaymb ~ kaal, data=students)
summary(peaymb_GLM.1)
```

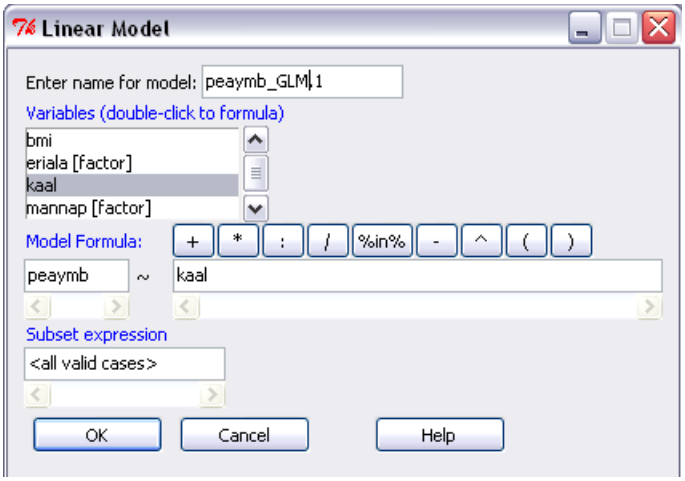
[1]

Selles käsus mark `<-` tähendab omistamist ja võib olla asendatud ka võrdusmärgiga `=`, `peaymb_GLM.1` on mudelile antud nimi ja käsk `summary` trükib välja olulisema antud mudelit puudutava statistika. Kui teinekord on soov üksnes kiirelt kontrollida, kas mõni lisatud argument on statistiliselt oluline (vmt) ja ei ole kindlat soovi mudelit hiljem edasi uurida (jääke, prognoose jne), siis ei ole vaja mudelile ka mingit nime omistada (ja seega ka selle nime all salvestada), vaid piisab üksnes käsust kujul

```
summary(lm(peaymb ~ kaal, data=students))
```

b) *R Commander*'is on lineaarsed mudelid tellitavad menüüst

Statistics -> Fit models -> Linear model …



[1] Märkused. Mudelite konstrueerimiseks *R*'is on vajalik tunda kasutatavaid operaatoreid (tehete märke) ja mudelite konstrueerimise eeskirju.

- Oluliseim mudelite esitamisel kasutatav operaator *R*'is on `~`.
  Avaldis `y ~ model` tähistab funktsioontunnuse `y` väärtuste lähendamisest lineaarse võrrandiga `model`.
  Taoline võrrand sisaldab märgiga `+` eraldatud muutujaid (näiteks `a + b`).
  Muutujad kujutavad enesest argument- e faktortunnuste nimesid.
- Faktorite `a` ja `b` koosmõju märgitakse kujul `a:b`.
- Esitus `a*b` tähendab `a + b + a:b`.

- Operaator `^` võimaldab esitada lühemalt ette antud järku koosmõjusid koos peaefektidega. Näiteks on esitus `(a+b+c)^2` sama, mis `(a+b+c)*(a+b+c)`, mis omakorda hõlmab faktorite `a`, `b` ja `c` peamõjusid ja kõiki kahekaupa koosmõjusid: `a + b + c + a:b + a:c + b:c`.
- Esitus `b %in% a` märgib, et faktor `b` on allutatud faktorile `a`.
- Operaator `-` on kasutusel mingi muutuja mudelist välja jätmiseks, näiteks on esitus `(a+b+c)^2 - a:b` identne mudeliga `a + b + c + b:c + a:c`.
- Ilma vabaliikmeta mudel on esitatav kujul `y ~ x - 1`. Alternatiivsed viisid vabaliikmeta mudeli defineerimiseks on `y ~ x + 0` ja `y ~ 0 + x`.
- Lisaks faktorite nimedele võivad mudelid sisaldada ka matemaatilisi funktsioone.
  Näiteks `log(y) ~ a + log(x)`.
  Kui rakendatavad funktsioonid sisaldavad mudelite konstrueerimisel kasutatavaid sümboleid, tuleks arusaamatuste vältimiseks need osad mudelist, kus operaatoreid kasutatakse aritmeetiliste tehete mõttes, eraldada kasutades funktsiooni `I()`.
  Näiteks mudelis `y ~ a + I(b+c)` kasutatakse tunnuse `y` modelleerimiseks tunnuste `b ja c summat`.

Tulemus:

```
> peaymb_GLM.1 <- lm(peaymb ~ kaal, data=students)

> summary(peaymb_GLM.1)

Call:
lm(formula = peaymb ~ kaal, data = students)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-9.4109 -1.4582  0.2312  1.8826  9.4470

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  45.1738     1.8000   25.10  < 2e-16 ***
kaal          0.1632     0.0277    5.89 6.57e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.907 on 90 degrees of freedom
  (8 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.2782, Adjusted R-squared: 0.2702
F-statistic: 34.69 on 1 and 90 DF,  p-value: 6.573e-08
```

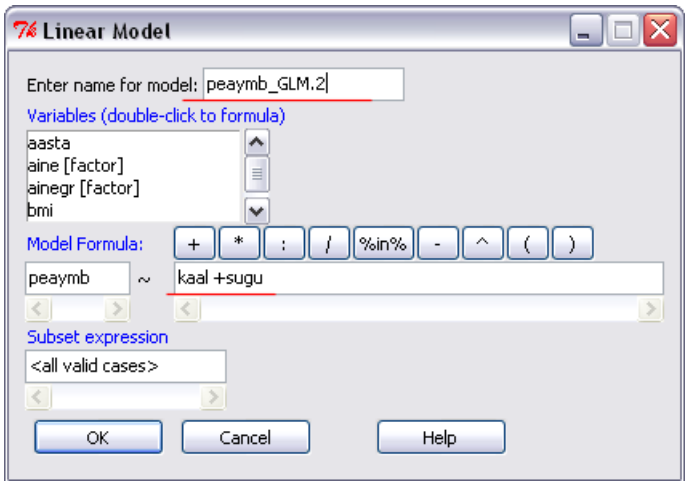
Peaümbermõõt = 45,1738 + 0,1632×Kaal

Kaalu mõju on statistiliselt oluline

2.2.

- Aga kas lisaks kaalule ka tudengite soo arvestamine võimaldab peaümbermõõtu täpsemini prognoosida?

  Märkus. Analüüsi, millega ühe korraga analüüsitakse nii pideva argumenttunnuse kui ka diskreetse faktortunnuse mõju, nimetatakse mõnel pool ka **kovariatsioonanalüüsiks** (sisuliselt on tegu kokku pandud regressioon- ja dispersioonanalüüsiga).



R Commander'is:

Statistics -> Fit models -> Linear model …

Käsud:

```
> peaymb_GLM.2 <- lm(peaymb ~ kaal +sugu, data=students)

> summary(peaymb_GLM.2)
```

Tulemus:

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 45.55234    2.59115  17.580  < 2e-16 ***
kaal         0.15945    0.03325   4.795 6.49e-06 ***
sugu[T.N]   -0.18006    0.88216  -0.204    0.839
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.923 on 89 degrees of freedom
  (8 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.2786, Adjusted R-squared: 0.2624
F-statistic: 17.18 on 2 and 89 DF,  p-value: 4.893e-07
```

Kuna diskreetsete faktorite üksikute tasemete mõjud pole üheselt hinnatavad, võtab *R* vaikimisi neist esimese (antud juhul Sugu="M") mõju võrdseks 0-ga (nö baasiks).

Seega tähendab *R*'i väljundi rida `sugu[T.N]  -0.18006`, et hinnanguliselt on naisterahvaste keskmine peaümbermõõt meeste keskmisest peaümbermõõdust 0,18 cm võrra väiksem.

Seda, et hinnatud erinevust ei ole erilist põhjust 0-st erinevaks lugeda, näitab näiteks hinnangu standardviga 0,88 cm. Robustselt võttes peaks hinnatud parameetri tegelik väärtus jääma 95%-lise tõenäosusega vahemikku (parameetri hinnang ± 2 standardviga),
st, et antud juhul peaks meeste ja naiste peaümbermõõtude vaheline erinevus 95%-lise tõenäosusega jääma vahemikku -1,94 kuni 1,58 cm, ehk olema ligikaudu 0.

Olulisuse tõenäosuse p = 0,839 alusel tuleks järeldada, et naisterahvaste peaümbermõõdud ei erine statistiliselt oluliselt meesterahvaste peaümbermõõtudest (sisuliselt tähendab see, et soo mõju peaümbermõõdule ei ole statistiliselt oluline).

Seda, et soo mudelisse lisamine prognoosi täpsust ei parandanud, näitab ka eelmise mudeliga võrreldes peaaegu mitte muutnud R^2 väärtus.

Soovi korral võib siiski kirja panna mudelid nii naiste kui ka meeste peaümbermõõtude tarvis:

Peaümbermõõt | Sugu="N" = 45,55 – 0,18 + 0,159×Kaal = 45,37 + 0,159×Kaal

Peaümbermõõt | Sugu="M" = 45,55 + 0 + 0,159×Kaal = 45,55 + 0,159×Kaal

- Aga veel, sobitaks õige mudelisse lisaks soole ka soo ja kaalu koosmõju
  (Et miks? Ega ma ei teagi, tuli lihtsalt selline mõte, et ehk on peaümbermõõdu ja kaalu vaheline seos meestel ja naistel erinev. Tegelikult tegin vist varem hajuvusdiagrammid või leidsin korrelatsioonikordajad mõlemale soole eraldi (vt joonist eelmise praktikumi ülesandes 4.3), ja tegin seda vaid isiklikule kogemusele tuginedes tekkinud idee kontrollimiseks).

```
peaymb_GLM.3 = lm(peaymb ~ kaal + sugu + kaal:sugu, data=students)
summary(peaymb_GLM.3)
```

Vastavalt *R*'i mudelite esitamise süntaksile annab sama tulemuse ka operaatori `*` abil esitatud mudel:

```
lm(peaymb ~ kaal*sugu, data=students)
```

Tulemus:

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  34.96314    6.06303   5.767 1.18e-07 ***
kaal          0.29989    0.07996   3.751 0.000315 ***
sugu[T.N]    12.13460    6.45439   1.880 0.063409 .
kaal:sugu[T.N] -0.16877    0.08765  -1.925 0.057398 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.879 on 88 degrees of freedom
  (8 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.3077, Adjusted R-squared: 0.2841
F-statistic: 13.04 on 3 and 88 DF,  p-value: 4.021e-07
```

Soo mõju pole endiselt statistiliselt oluline (p = 0,063), nagu pole seda ka soo ja kaalu koosmõju (p = 0,057), aga et mõlemal juhul on p-väärtus nö piiri peal ja ka R^2 on üsna mitme protsendi võrra suurem, eelistaksin mina viimast mudelit.

Naiste ja meeste peaümbermõõdud on sellest mudelist prognoositavad järgmiste valemite abil:

Peaümbermõõt | Sugu="N" = 34,96 + 12,13 + (0,300 – 0,169)×Kaal = 47,09 + 0,131×Kaal

Peaümbermõõt | Sugu="M" = 34,96 + 0 + (0,300 + 0)×Kaal = 34,96 + 0,300×Kaal

Väljatrüki viimases reas olev olulisuse tõenäosus ($p = 4{,}02\times10^{-7}$) ütleb, et konstrueeritud mudel tervikuna on statistiliselt oluline.

- Märkus.

Et sisuliselt on tegu meeste ja naiste tarvis eraldi kehakaalu ja peaümbermõõdu vahelise lineaarse seose hindamisega, saame sama hea mudeli ka ilma kehakaalu peamõjuta.

```
summary(lm(peaymb ~ sugu + kaal:sugu, data=students))
```

Veendumaks, et ka võrrandid meeste ja naiste peaümber-mõõtude prognoosimiseks tulevad identsed eelnevalt kirja pandutega, kirjutage vastavad valemid välja kõrvaloleva analüüsi tulemustest.

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 34.96314    6.06303   5.767 1.18e-07 ***
sugu[T.N]   12.13460    6.45439   1.880 0.063409 .
suguM:kaal   0.29989    0.07996   3.751 0.000315 ***
suguN:kaal   0.13112    0.03591   3.651 0.000443 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.879 on 88 degrees of freedom
  (8 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.3077, Adjusted R-squared: 0.2841
F-statistic: 13.04 on 3 and 88 DF,  p-value: 4.021e-07
```

2.3.

Sageli ei piisa mudelite võrdlemisel üksnes kirjeldavatel statistikutel (nagu näiteks R^2) baseeruvaist võrdlustest. Juhul, kui võrreldavad mudelid on hierarhilised (üks on teisest saadav mingite argumentide lisamise teel), on võimalik testida ka hüpoteesi keerulisema mudeli paremuse statistilisest olulisusest. *R*-s on lihtsaim viis selle teostamiseks kasutada funktsiooni `anova`.

a) Näiteks kui teil on kaks mudelit

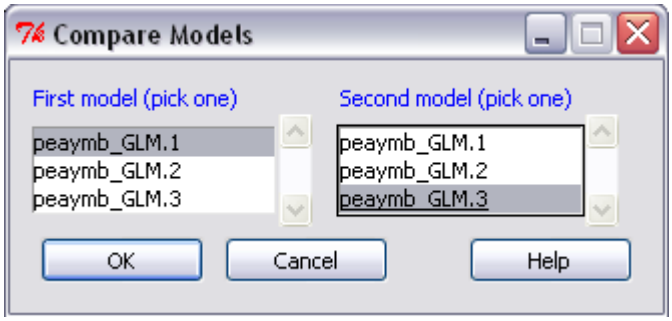
```
peaymb_GLM.1 <- lm(peaymb ~ kaal, data=students)
peaymb_GLM.3 <- lm(peaymb ~ kaal + sugu + sugu:kaal, data=students)
```

tuleb nende mudelite võrdlemiseks sisestada käsk

```
anova(peaymb_GLM.1,peaymb_GLM.3)
```

b) Sama test on valitav ka *R Commander*'i menüüdest:

Models -> Hypothesis tests -> Compare two models …



↓

```
> anova(peaymb_GLM.1,peaymb_GLM.3)
Analysis of Variance Table

Model 1: peaymb ~ kaal
Model 2: peaymb ~ kaal + sugu + kaal * sugu
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
1     90 760.66
2     88 729.57  2     31.09 1.8752 0.1594
```

Järeldus: komplekssem mudel ei ole statistiliselt oluliselt parem (p = 0,159). Samas tähendaks üksnes lihtsama mudeli juurde jäämine põhjendusega, et mis sest keerulisemast ikka rääkida, kui ta ei ole statistiliselt oluliselt parem, seda, et võimalik huvitav peaümbermõõdu ja kaalu vahelise seose sõltuvus soost jääks ära märkimata …

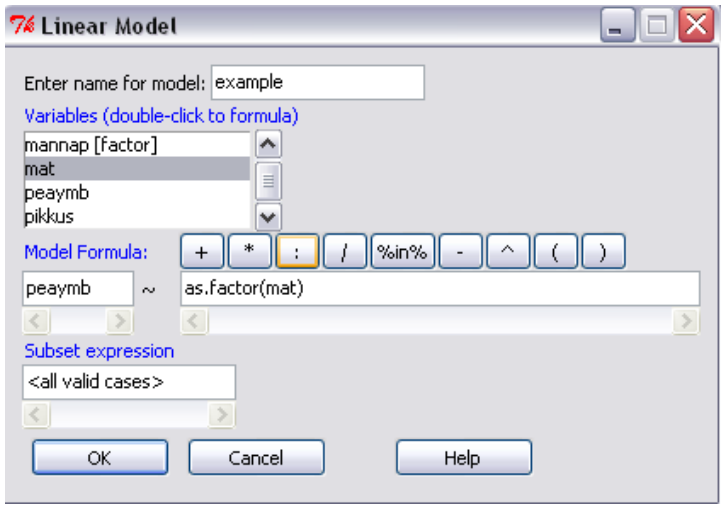
2.4.

Aga veel – põhimõtteliselt võib uurida ka seda, kas ehk peaümbermõõt hoopis õpitava erialaga või matemaatikahindega seotud pole.

- Viimasel juhul tuleb *R*'ile eraldi öelda, et ta arvulise tunnusega 'mat' mitte regressioonanalüüsi ei püüaks teostada, vaid seda ikka diskreetse faktorina käsitleks. Lihtsaim variant on kirjutada mudelisse liikme `mat` asemel `as.factor(mat)`:

```
summary(lm(peaymb ~ as.factor(mat), data=students))
```

Või sama *R Commander*'is:
Statistics -> Fit models -> Linear model ...



- Alternatiivina võib tekitada andmetabelisse '*students*' uue, *R*'i poolt juba diskreetse faktor-tunnusena käsitletava tunnuse (kuidas, vt erinevate võimaluste kirjeldusi allpool) ning kasutada mudelis seda.

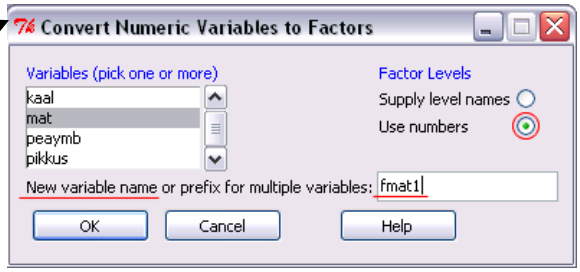
- Märkus. Diskreetse arvtunnuse baasil faktortunnuse tekitamine.

Skriptiaknasse sisestatava funktsiooniga `as.factor`

```
students$fmat1 = as.factor(students$mat)
```

või *R Commander*'i menüükäsuga

Data -> Manage variables in active data set
-> Convert numeric variables to factors…



on loodav samuti arvuliste väärtustega '3', '4' ja '5' faktortunnus nimega 'fmat1'.

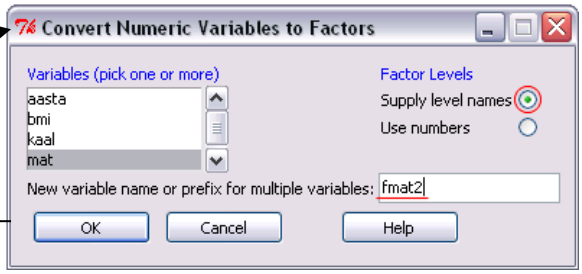
……

Skriptiakna käsuga

```
students$fmat2 = factor(students$mat, labels=c('kolm','neli','viis'))
```

või *R Commander*'i menüükäsuga

Data -> Manage variables in active data set
-> Convert numeric variables to factors…



on loodav sõnaliste väärtustega faktortunnus (nimega 'fmat2').

3.

Andmestik: http://ph.emu.ee/~ktanel/DK_0007/kala.xls

Andmestik, mis on osa Mariann Nõlvaku poolt aastail 2004-2006 kogutud Eesti kalade andmebaasist, sisaldab järgmisi andmeid:

- kala number (lihtsalt identifitseerimiseks);
- liik (6 liiki: haug, särg, latikas, luts, ahven ja koha);
- rühm: röövkala või lepiskala;
- 5 püügikohta (Võrtsjärv, Kärevere, Kastre, Praaga ja Peipsi järv);
- püügisesoon (kevad-suvi või sügis-talv);
- kaal ja pikkus;
- sugu;
- laiussiga (*Diphyllobothrium latum*) nakatumine ('diphyl' = 0 või 1);
- laiussi leidude arv kalal ('diph_arv').

Importige andmestik *R Commander*'isse ja määrake vaikimisi andmestikuks: 

3.1. Mudeli parameetrite hindamine

Kuidas sõltub latikate kaal elukohast ja soost?

Modelleerime latikate kaalu järgmise lineaarse mudeli abil:

$$y_{ijk} = \mu + K_i + S_j + \varepsilon_{ijk},$$

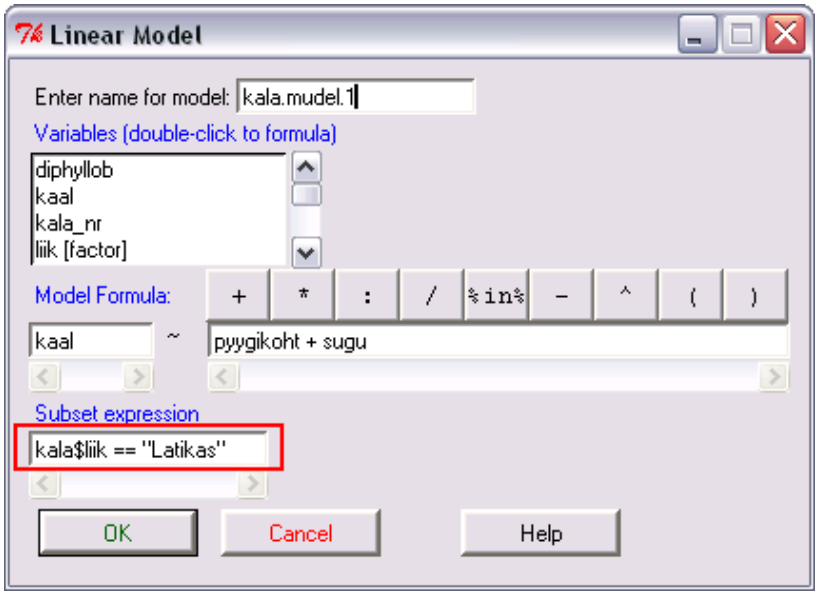
kus y_{ijk} on i.-st kohast püütud j. sugu k. kala kaal, K_i on i. püügikoha mõju (i=1,…,5) ja S_j on j. soo mõju (j=1,2).

a) Toodud mudel on rakendatav käsuga

```
kala.mudel.1 = lm(kaal ~ pyygikoht + sugu, data=kala, subset=kala$liik=="Latikas")
summary(kala.mudel.1)
```

b) või siis *R Commander*'i menüüdest

Statistics -> Fit models -> Linear model ...



Väljavõtt tulemustest:

```
Coefficients:
                      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)           1020.06     32.34  31.544  < 2e-16 ***
pyygikoht[T.Kärevere]  -95.63     39.88  -2.398   0.0176 *
pyygikoht[T.Peipsi]     76.94     40.22   1.913   0.0575 .
pyygikoht[T.Praaga]    -63.66     42.27  -1.506   0.1340
pyygikoht[T.Võrtsjärv] -372.63     39.01  -9.551  < 2e-16 ***
sugu[T.i]              -113.36     28.14  -4.028 8.52e-05 ***
```

Vabaliige 1020,1 näitab Kastrest püütud emaste kalade keskmise kaalu hinnangut (*R* võtab vaikimisi 0-ga võrdseks iga faktori esimese taseme mõju, milleks püügikohtade tähestikulise järjekorra alusel on 'Kastre' ja sugude osas 'e'), saadud hinnangu standardhälve on 32,3 g.

Ülejäänud hinnangud näitavad keskmist erinevust Kastrest püütud emaste kalade keskmisest ja *p*-väärtused näitavad vastava erinevuse statistilist olulisust.

Näiteks Kärevere emaste latikate keskmiseks kaaluks saame 1020,1 – 95,6 = 924,5 g ja see erineb statistiliselt oluliselt Kastrest püütud emaste latikate keskmisest (p = 0,0176).

3.2. Kontrastide konstrueerimine

Samuti saame arvutada Võrtsjärve isaste latikate keskmise kaalu:

1020,1 – 372,6 – 113,4 = 534,1 g.

Testimaks viimase erinevust Kastrest püütud emaste latikate keskmisest, tuleb täiendavalt moodustada vastav **kontrast** (= üheselt hinnatav mudeli parameetrite lineaarkombinatsioon) ja testida selle erinevust nullist.

a) Selleks tuleb sisestada käsk

```
linear.hypothesis(kala.mudel.1, c(0,0,0,0,1,1), c(0))
```

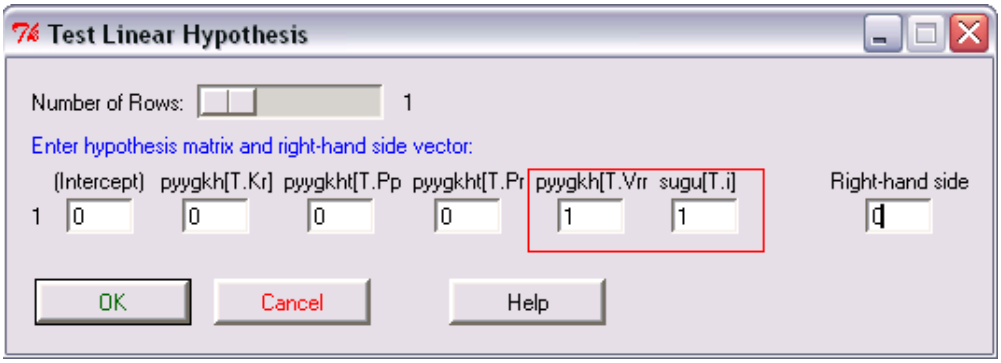
Siin esimene argument märgib analüüsi aluseks olevat mudelit, teine omistab mudeli kõigile nullist erinevaks hinnatud parameetritele kaalud (faktorid täpselt sellises järjekorras, nagu mudelis kirjas, ja faktorite tasemed tähestikulises järjekorras), kolmas argument näitab, millega peaks defineeritud kontrast võrduma nullhüpoteesi korral.

b) Sama analüüs *R Commander*'i abil

(vajadusel tuleb määrata *R Commander*'i menüükäskudes kasutatav mudel: 

)

Models -> Hypothesis tests -> Linear hypothesis …



Tulemus:

```
Hypothesis:
pyygikoht[T.Võrtsjärv] + sugu[T.i] = 0

Model 1: kaal ~ pyygikoht + sugu
Model 2: restricted model

  Res.Df      RSS  Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    167  4600679
2    168  8085728  -1  -3485049 126.50 < 2.2e-16 ***
```

Erinevus on statistiliselt oluline ($p < 0{,}001$).

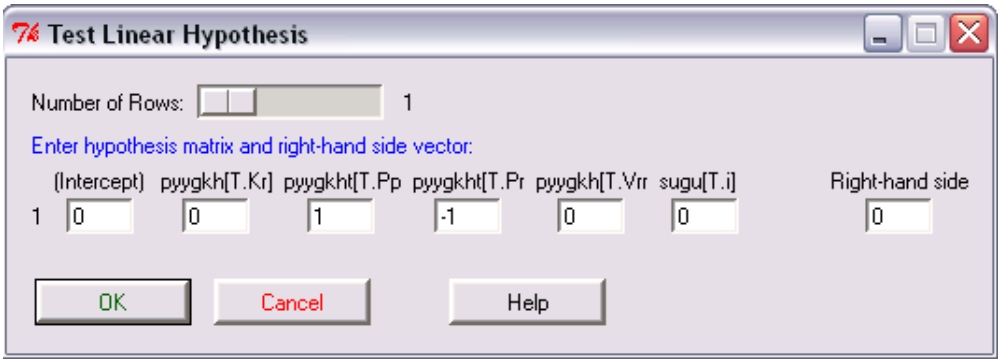
3.3.

Aga kas Peipsi ja Praaga latikad erinevad oluliselt?

Lahendus:

```
linear.hypothesis(kala.mudel.1, c(0,0,1,-1,0,0), c(0))
```

või



Tulemus:

```
Hypothesis:
pyygikoht[T.Peipsi] - pyygikoht[T.Praaga] = 0

Model 1: kaal ~ pyygikoht + sugu
Model 2: restricted model

  Res.Df      RSS  Df Sum of Sq      F   Pr(>F)
1    167  4600679
2    168  4892439  -1   -291760 10.591 0.001376 **
```

Vastus: erinevad küll ($p = 0{,}0014$).

3.4. Keskmiste väärtuste hindamine

95%-usaldusinetrvallid Peipsi ja Praaga isaste latikate keskmistele kaaludele on leitavad käskudega

```
predict(kala.mudel.1, data.frame(pyygikoht="Peipsi", sugu="i"), interval="confidence")
predict(kala.mudel.1, data.frame(pyygikoht="Praaga", sugu="i"), interval="confidence")
```

```
          fit      lwr      upr
[1,] 983.6416 918.6315 1048.652
```

```
          fit     lwr      upr
[1,] 843.0402 779.111 906.9695
```

Seega jäävad Peipsi ja Praaga isaste latikate keskmised kaalud 95%-tõenäosusega vahemikesse 918,6…1048,7 g ja 779,1…907,0 g.

3.5. Faktorite mõju statistilise olulisuse testimine

Kas aga püügikoha ja soo mõjud latikate kaalule on üldse statistiliselt olulised?

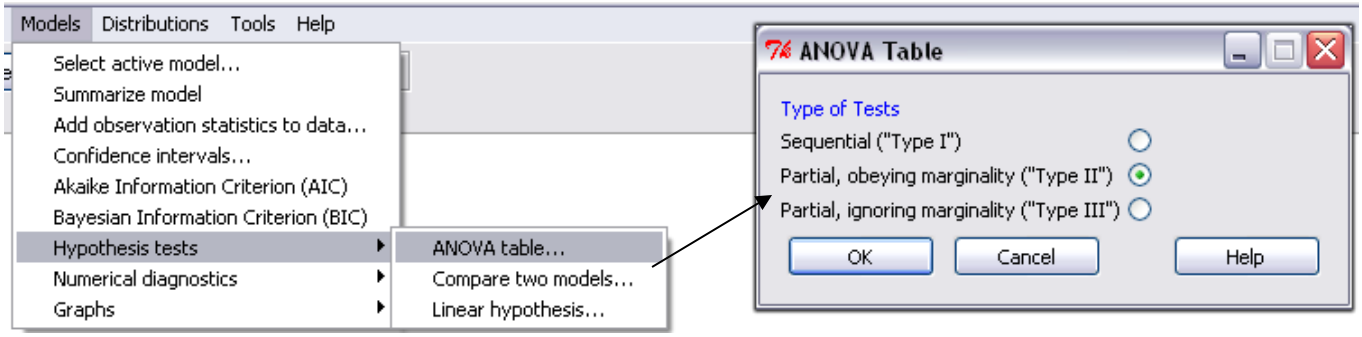
Hüpoteese faktorite mõjude statistilise olulisuse kohta saab testida käsuga

```
Anova(kala.mudel.1)
```

või siis *R Commander*'i menüüdest *Models -> Hypothesis tests -> ANOVA table*

(vajadusel määra viimati konstrueeritud mudel vaikimisi mudeliks: 

)



Tulemused:

```
Anova Table (Type II tests)

Response: kaal
           Sum Sq  Df F value    Pr(>F)
pyygikoht 4105949   4  37.260 < 2.2e-16 ***
sugu       447008   1  16.226  8.52e-05 ***
Residuals 4600679 167
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Nii püügikoha kui ka soo mõju latikate kaalule on statistiliselt oluline (p<0,05).

4.

4.1. Aga kas latikate kaal sõltub lisaks ka sesoonist (kevad-suvi, sügis-talv)?

Lisame mudelile sesooni efekti L_k (k=1,2):

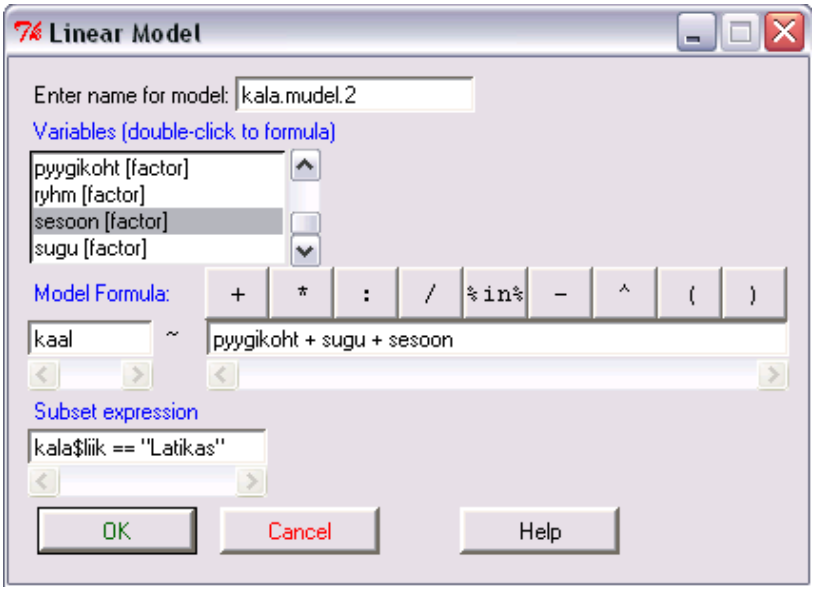
$$y_{ijkl} = \mu + K_i + S_j + L_k + \varepsilon_{ijkl}.$$

a)

```
kala.mudel.2 = lm(kaal~pyygikoht+sugu+sesoon, data=kala, subset=kala$liik=="Latikas")
summary(kala.mudel.2)
```

b) Alternatiivina toodud käskudele võib kasutada ka *R Commander*'it:

Statistics -> Fit models -> Linear model ...



Väljavõtt tulemustest:

```
Coefficients:
                     Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)          1028.706     30.808  33.391  < 2e-16 ***
pyygikoht[T.Kärevere]  -52.639     39.190  -1.343   0.1811
pyygikoht[T.Peipsi]    116.895     39.332   2.972   0.0034 **
pyygikoht[T.Praaga]     -4.334     42.459  -0.102   0.9188
pyygikoht[T.Võrtsjärv] -322.351     38.864  -8.294 3.57e-14 ***
sugu[T.i]              -117.052     26.768  -4.373 2.16e-05 ***
sesoon[T.sygis-talv]   -114.337     26.388  -4.333 2.54e-05 ***
```

Sügisel-talvel püütud latikad on keskmiselt 114,3 g kergemad kui kevadel-suvel püütud ja see erinevus on statistiliselt oluline (p = 2,54e-05 < 0,001).

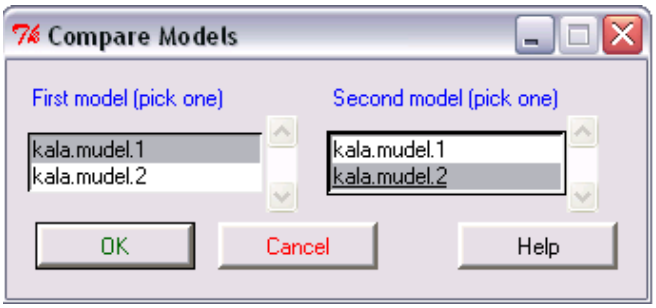
4.2. Kas uus mudel modelleerib latikate kaalu täpsemini?

Lahendus:

```
anova(kala.mudel.1,kala.mudel.2)
```

või

Models -> Hypothesis tests -> Compare two models…



Tulemus:

```
Analysis of Variance Table

Model 1: kaal ~ pyygikoht + sugu
Model 2: kaal ~ pyygikoht + sugu + sesoon
  Res.Df     RSS  Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    167 4600679
2    166 4133230   1    467449 18.774 2.542e-05 ***
```

Jah, uus mudel annab statistiliselt oluliselt parema tulemuse ($p < 0{,}001$).

4.3.

Uurime veel näiteks, kas Tartust ülesvoolu (Kärevere ja Võrtsjärv) püütud latikate keskmine kaal erineb oluliselt Tartust allavoolu (Kastre, Peipsi ja Praaga) püütud latikate keskmisest kaalust.

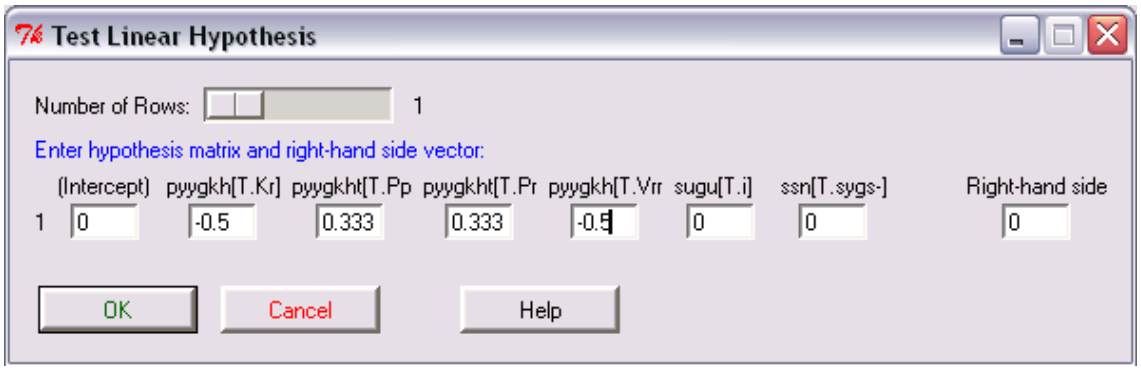
Vastavalt eelmise leheküljе lõpus toodud tulemuste tabelile on Tartust ülesvoolu jäävate püügikohtade (Kärevere ja Võrtsjärv) keskmine mõju (–52,6 – 322,4) / 2 = –187,5 g.
Tartust allavoolu jäävate püügikohtade keskmine mõju on (0 – 4,3 + 116,9) / 3 = 37,5 g.

Leitud keskmiste mõjude (ja seega ka keskmiste kaalude) erinevuse testimiseks tuleb testida vastava kontrasti 0-st erinemist:

```
linear.hypothesis(kala.mudel.2, c(0,-0.5,0.333,0.333,-0.5,0,0), c(0))
```

või

Models -> Hypothesis tests -> Linear hypothesis…



Tulemus:

```
Hypothesis:
-0.5 pyygikoht[T.Kärevere] + 0.333 pyygikoht[T.Peipsi] + 0.333 pyygikoht[T.Praaga] - 0.5 pyygikoht[T.Võrtsjärv] = 0

Model 1: kaal ~ pyygikoht + sugu + sesoon
Model 2: restricted model

  Res.Df      RSS  Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    166  4133230
2    167  6125026  -1  -1991796 79.995 7.113e-16 ***
```

Erinevus on statistiliselt oluline ($p < 0{,}001$).

4.4.

Mudelisse kaasatud faktorite mõjudest ja nende täpsusest kiire ülevaate saamiseks on mugav kasutada *R Commander*'i käsku

Models -> Graphs -> Effect plots