Matemaatiline statistika ja modelleerimine

Üldised lineaarsed mudelid
[*general linear models*, *GLM*]

EMÜ doktorikool
DK.0007

Tanel Kaart

Katsepõhine *vs* mudelipõhine uuring

- Katsepõhine uuring

  katsetingimused range kontrolli all,
  suhteliselt vähe ja enamasti tasakaalus [*balanced*] andmed,
  analüüsiks standardne regressioon- või dispersioonanalüüs (t-test).

- Mudelipõhine uuring

  juhuslikud ja enamasti mittetasakaalus [*unbalanced*] andmed,
  mittekontrollitud katsetingimused,
  peamine analüüsi alus on uurija intuitsioon/analüüsitava materjali tundmine,
  meetodeiks mitmefaktorilised, sageli mittestandardse vaatluste kovariatsioonistruktuuriga mudelid.

- Mudel mõlemal juhul

  mõõdetud väärtus = sobitatud väärtus + viga.

Sõltuvad ja sõltumatud tunnused

- **Uuritavad** e **sõltuvad tunnused** [*dependent variables*] – tunnused, mille käitumine huvi pakub.
- **Argument-** e **sõltumatud tunnused** [*independent variables*] e **faktorid** – tunnused, mille mõju uuritavatele tunnustele soovitakse selgitada.
- Faktortunnuse erinevaid väärtusi nimetatakse **tasemeteks** e **nivoodeks** [*levels*].
- Iga faktor jaguneb vastavalt oma tasemete iseloomule **diskreetseks** või **pidevaks**, **arvuliseks** (kvantitatiivne) või **klassifitseerivaks** (kvalitatiivne).

  Näiteks on lehma sünniaasta, laktatsioon jne diskreetsed arvulised faktorid;
  farm tasemetega (väärtustega) 'Vorbuse', 'Ülenurme' jne on diskreetne klassifitseeriv faktor;
  laktatsiooni pikkus, piimatoodang, pekipaksus jne (mõõdetud tunnused) on aga pidevad faktorid.

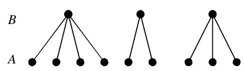
Faktorite vahekord mudelis

- Faktorid on **lihtsad** ja **tuletatud**. Lihtsate faktorite väärtused on vahetult mõõdetud või registreeritud, tuletatud faktorid moodustatakse lihtsatest. Tüüpilised tuletatud faktorid on **interaktsioonid** e. koosmõjud ning arvuliste faktorite korrutised.

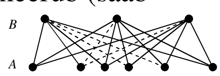
  Näiteks on farm, isa ja laktatsiooni pikkus lihtsad faktorid; farm*isa (koosmõju) ja laktatsioon*laktatsioon (arvulise faktori kõrgem järk) aga tuletatud faktorid.

- Praktikas on faktorite vahel sageli ka **alluvusseosed**. Faktor *A* allub faktorile *B*, kui *A* iga nivoo (tase) esineb koos vaid ühe B nivooga.

  Näiteks võime me tavaliselt lugeda farmi allutatuks maakonnale; kui iga ema on ristatud kindla isaga, on ema allutatud isale.



- Faktorid *A* ja *B* on **ristseoses**, kui *A* iga nivoo kombineerub (saab põhimõtteliselt kombineeruda) *B* kõigi nivoodega.



  Näiteks kui viiel aastal on uuritud pullide tütarde jõudlusandmeid ja igal pullil on igal aastal tütreid, on pull ja aasta ristseoses; kui aga igal aastal on valitud uued pullid, allub pull aastale.

Lineaarsed mudelid

- Lineaarne mudel sisaldab komplekti faktoreid, mis mõjutavad vaatlusi aditiivselt, kusjuures mingi muutuja faktori siseselt võib olla näiteks ruutu võetud.
- Lineaarseid mudeleid sobib rakendada enamustes bioloogilistes uuringutes.
- Mittelineaarsed seosed on tihti lähendatavad lineaarse mudeliga.

- Traditsiooniline lineaarne mudel koosneb kolmest osast:
  - võrrand – mudeli esitus faktorite mõjude summana;
  - juhuslike muutujate keskväärtused ja dispersioonistruktuur;
  - eeldused, kitsendused ja piirangud.

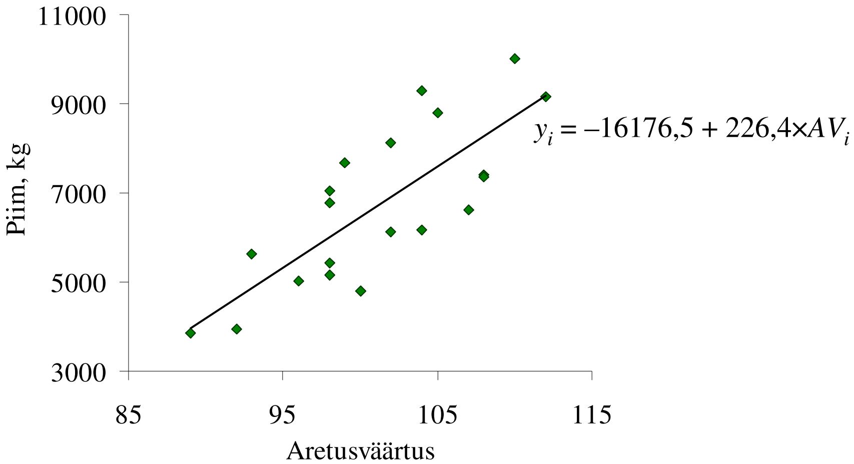
Näiteandmestik

Lehm	Tõug	Farm	Aretusväärtus	Piim. kg
1	EHF	F1	105	8804.256
2	EHF	F3	112	9152.284
3	EHF	F4	98	7055.046
4	EHF	F2	89	3856.88
5	EHF	F1	98	6768.067
6	EHF	F4	99	7676.258
7	EHF	F4	104	9282.086
8	EHF	F1	102	8126.694
9	EHF	F1	110	10017.95
10	EHF	F1	93	5622.356
11	EPK	F2	98	5431.155
12	EPK	F2	108	7406.513
13	EPK	F4	98	5152.659
14	EPK	F3	100	4797.637
15	EPK	F3	96	5011.426
16	EPK	F4	108	7369.143
17	EPK	F2	107	6626.611
18	EPK	F2	104	6170.835
19	EPK	F2	92	3948.281
20	EPK	F3	102	6113.998

Diskreetsed faktorid — Pidevad faktorid — Sõltuv muutuja

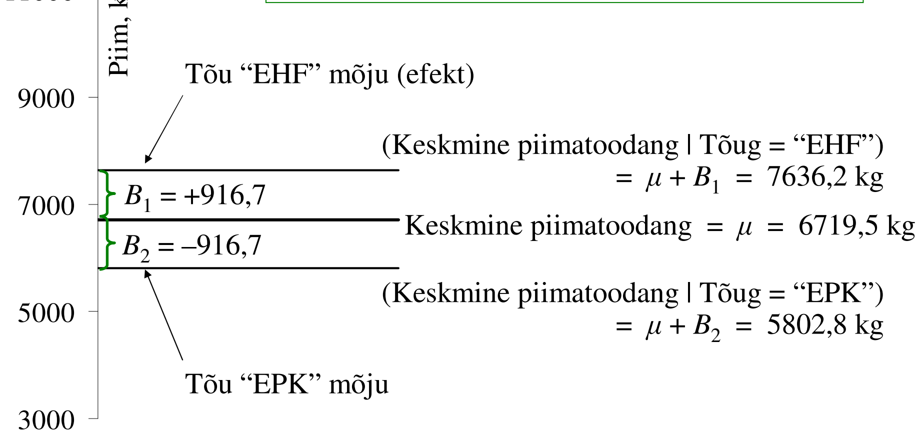
Mudeli esitus

Regressioonanalüüsi mudel: $y_i = \mu + b{\times}AV_i + \varepsilon_i$



Mudeli esitus

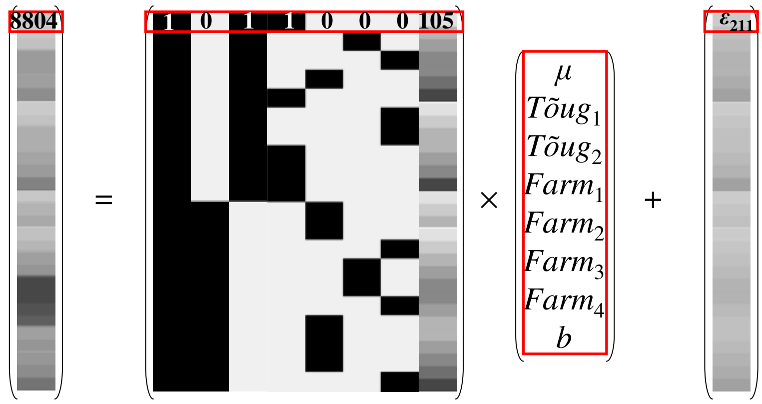
Dispersioonanalüüsi mudel: $y_{ij} = \mu + B_i + \varepsilon_{ij}$



Mudeli esitus

$$y_{ijk} = \mu + T_i + F_j + b \times AV_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$$

$$y_{211} = \mu + 0{\times}T_1 + 1{\times}T_2 + 1{\times}F_1 + 0{\times}F_2 + 0{\times}F_3 + 0{\times}F_4 + b \times AV_{211} + \varepsilon_{211}$$



$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \times \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{pmatrix} 8804,3 \\ 9152,3 \\ 7055,0 \\ 3856,9 \\ 6768,1 \\ 7676,3 \\ 9282,1 \\ 8126,7 \\ 10018,0 \\ 5622,4 \\ 5431,2 \\ 7406,5 \\ 5152,7 \\ 4797,6 \\ 5011,4 \\ 7369,1 \\ 6626,6 \\ 6170,8 \\ 3948,3 \\ 6114,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 105 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 112 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 98 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 89 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 98 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 99 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 104 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 102 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 110 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 93 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 98 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 98 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 96 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 108 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 107 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 104 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 92 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 102 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu \\ Tõug_1 \\ Tõug_2 \\ Farm_1 \\ Farm_2 \\ Farm_3 \\ Farm_4 \\ b \end{pmatrix}$$

Hinnatavad efektid, reparametriseerimine

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$$

Probleem on, et $\boldsymbol{\beta}$ ei ole üheselt hinnatav.

Vaatame näiteks ANOVA-mudelit: $y_{ij} = \mu + B_i + \varepsilon_{ij}$
Keskmine piimatoodang (Tõug = “EHF”) = $\mu_1 = \mu + B_1 = 7636{,}2$ kg
Keskmine piimatoodang (Tõug = “EPK”) = $\mu_2 = \mu + B_2 = 5802{,}8$ kg
Meil on 2 võrrandit ja 3 tundmatut parameetrit.

Lahendus? Reparametrisatsioon = lisakitsendused

- Klassikaline reparametrisatsioon: $B_1 + B_2 = 0$
  ($\mu = 6719{,}5$; $B_1 = 916{,}7$; $B_2 = -916{,}7$)
- *SAS*-i reparametrisatsioon: $B_2 = 0$ ($B_1 = 1833{,}4$; $\mu = 5802{,}8$)
- *R*-i reparametrisatsioon : $B_1 = 0$ ($B_2 = -1833{,}4$; $\mu = 7636{,}2$)

Hinnatavad efektid, reparametriseerimine

SAS

```
proc glm data=dk0007;
 class breed farm;
 model milk = breed farm bv / solution;
run;
```

The SAS System 14:16 Wednesday, February 13, 2008 8

The GLM Procedure

Dependent Variable: milk milk

Parameter		Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept		-16637.09733 B	1893.708817	-8.79	<.0001
breed	EHF	1527.26447 B	291.258313	5.24	0.0001
breed	EPK	0.00000 B	.	.	.
farm	F1	-95.49905 B	327.411139	-0.29	0.7748
farm	F2	-678.20733 B	321.650812	-2.11	0.0535
farm	F3	-753.46783 B	340.016142	-2.22	0.0438
farm	F4	0.00000 B	.	.	.
bv		227.09839	18.304106	12.41	<.0001

NOTE: The X'X matrix has been found to be singular, and a generalized inverse was used to solve the normal equations. Terms whose estimates are followed by the letter 'B' are not uniquely estimable.

Hinnatavad efektid, reparametriseerimine

RGui

```
> cow.model1 <- lm(milk  ~ breed  + farm  + bv , data=dk0007_glm)

> summary(cow.model1)

Call:
lm(formula = milk ~ breed + farm + bv, data = dk0007_glm)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-566.84 -373.07   36.75  312.64  773.69

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -15205.3     1872.2  -8.122 1.15e-06 ***
breed[T.EPK]  -1527.3      291.3  -5.244 0.000124 ***
farm[T.F2]     -582.7      384.2  -1.517 0.151575
farm[T.F3]     -658.0      390.5  -1.685 0.114160
farm[T.F4]       95.5      327.4   0.292 0.774809
bv              227.1       18.3  12.407 6.09e-09 ***
---
Signif. codes:  0 `***' 0.001 `**' 0.01 `*' 0.05 `.' 0.1 ` ' 1

Residual standard error: 483.5 on 14 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.9455,     Adjusted R-squared: 0.9261
F-statistic:  48.6 on 5 and 14 DF,  p-value: 2.354e-08
```

Hinnatavad funktsioonid, kontrastid

Kontrast on mudeli parameetrite hinnatav lineaarkombinatsioon.
Kontrastide esitamiseks sobib kasutada maatrikskorrutist kujul $\mathbf{l\beta}$.
Näiteks kontrast, hindamaks tõugudevahelist erinevust, on esitatav kujul

$$\mathbf{l}\times\boldsymbol{\beta} = (0\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)\times\begin{pmatrix}\mu\\ Tõug_1\\ Tõug_2\\ Farm_1\\ Farm_2\\ Farm_3\\ Farm_4\\ b\end{pmatrix} = 1\times Tõug_1 - 1\times Tõug_2$$

Milline efekt (erinevus) on hinnatav reavektori **l** abil:

l = (0 0 0 0,5 0,5 –0,5 –0,5 0)?

Vähimruutkeskmised [*least square means*]

Vähimruutkeskmine [LSM] kujutab enesest mingi faktori mingile tasemele vastavate väärtuste keskmist, mis on hinnatud mudelist sobivalt defineeritud kontrasti kujul.

Näiteks 2. farmi lehmade piimatoodangu vähimruutkeskmine hinnatakse kujul

$$\mathrm{LSM}(Farm_2) = \left(1 \,\vdots\, \tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{1}{2} \,\vdots\, 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \,\vdots\, \overline{av}\right) \times \begin{pmatrix} \mu \\ \hline Tõug_1 \\ Tõug_2 \\ \hline Farm_1 \\ Farm_2 \\ Farm_3 \\ Farm_4 \\ \hline b \end{pmatrix}$$

$$= 1 \times \mu + \frac{Tõug_1 + Tõug_2}{2} + 1 \times Farm_2 + b \times \overline{av}$$

Vähimruutkeskmised [*least square means*]

SAS

```
proc glm data=dk0007;
 class breed farm;
 model milk = breed farm bv / solution;
 lsmeans breed / stderr pdiff;
run;
```

Parameter		Estimate		Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept		-16637.09733	B	1893.708817	-8.79	<.0001
breed	EHF	1527.26447	B	291.258313	5.24	0.0001
breed	EPK	0.00000	B	.	.	.
farm	F1	-95.49905	B	327.411139	-0.29	0.7748
farm	F2	-678.20733	B	321.650812	-2.11	0.0535
farm	F3	-753.46783	B	340.016142	-2.22	0.0438
farm	F4	0.00000	B	.	.	.
bv		227.09839		18.304106	12.41	<.0001

The GLM Procedure
Least Squares Means

breed	milk LSMEAN	Standard Error	H0:LSMEAN=0 Pr > |t|	H0:LSMean1=LSMean2 Pr > |t|
EHF	$\boxed{7479.37593}$	180.89567	<.0001	0.0001
EPK	5952.11146	183.24601	<.0001	

keskmine aretusväärtus

$$LSM_{EHF} = Intercept + 1 \times EHF + 0 \times EPK + \frac{(F1 + F2 + F3 + F4)}{4} + coef \times \overline{BV}$$

$$= -16637{,}1 + 1527{,}3 + \frac{\overbrace{(-95{,}5 - 678{,}2 - 753{,}5 + 0)}}{4} + 227{,}1 \times 101{,}15 \approx 7479{,}5$$

I ja III tüüpi ruutude summad

SAS

```
proc glm data=dk0007;
 class breed farm;
 model milk = breed farm bv / solution;
run;
```

```
                                   The SAS System          14:16 Wednesday, February 13, 2008   8
                                  The GLM Procedure
Dependent Variable: milk   milk

                                        Sum of
Source                      DF         Squares    Mean Square    F Value    Pr > F
Model                        5     56822518.79    11364503.76      48.60    <.0001
Error                       14      3273463.43      233818.82
Corrected Total             19     60095982.22

               R-Square     Coeff Var      Root MSE     milk Mean
               0.945529      7.196185      483.5482      6719.507

Source                      DF     Type I SS     Mean Square    F Value    Pr > F
breed                        1    16806079.82    16806079.82      71.88    <.0001
farm                         3     4024063.57     1341354.52       5.74    0.0089
bv                           1    35992375.40    35992375.40     153.93    <.0001

Source                      DF   Type III SS     Mean Square    F Value    Pr > F
breed                        1     6429116.53     6429116.53      27.50    0.0001
farm                         3     1510502.69      503500.90       2.15    0.1392
bv                           1    35992375.40    35992375.40     153.93    <.0001
```

I ja III tüüpi ruutude summad

RGui

```
> anova(cow.model1)
Analysis of Variance Table

Response: milk
          Df   Sum Sq  Mean Sq  F value    Pr(>F)
breed      1 16806080 16806080  71.8765 6.925e-07 ***
farm       3  4024064  1341355   5.7367  0.008943 **
bv         1 35992375 35992375 153.9328 6.089e-09 ***
Residuals 14  3273463   233819
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

> drop1(cow.model1, test="F")
Single term deletions

Model:
milk ~ breed + farm + bv
       Df Sum of Sq      RSS   AIC  F value     Pr(F)
<none>              3273463   252
breed   1   6429117  9702580   272  27.4961 0.0001243 ***
farm    3   1510503  4783966   254   2.1534 0.1392264
bv      1  35992375 39265839   300 153.9328 6.089e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Korduvad mõõtmised

ID	Lakt.	Piim, kg
3396	1	4119
3396	2	5857
3396	3	6260
3990	1	3106
3990	2	3934
3990	3	5171
4390	1	2473
4390	2	3301
4390	3	2958
…		

Vaikimisi:

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Kompaund-sümmeetriline kovariatsioonistruktuur:

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2+\sigma^2 & \sigma^2 & \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots \\ \sigma^2 & \sigma_\varepsilon^2+\sigma^2 & \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots \\ \sigma^2 & \sigma^2 & \sigma_\varepsilon^2+\sigma^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2+\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 & \sigma_\varepsilon^2+\sigma^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Esimest järku autoregressiivne kovariatsioonistruktuur:

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma_\varepsilon^2 \times \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \rho & 1 & \rho & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \rho^2 & \rho & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \rho & \rho^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 1 & \rho & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \rho^2 & \rho & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ |\rho| \le 1$$

Juhuslikud faktorid, segamudel

- Kui palju on faktoril tasemeid?

  Kui vähe, siis on ilmselt tegu fikseeritud faktoriga.
  Kui palju, siis võib tegu olla juhusliku faktoriga.

- **Kas faktori tasemete arv populatsioonis on potentsiaalselt lõpmatu?**

  Kui jah, on tegu juhusliku faktoriga.

- Kas eksperimendi kordamisel on (võivad olla) uuritavad samad tasemed?

  Kui jah, on faktor fikseeritud.

- Huvi pakub kõigi (ka andmetes esindamata) tasemete keskmine mõju, ehk see, kui suur osa uuritava tunnuse koguvarieeruvusest on kirjeldatud antud faktori poolt?

  Kui jah, on ilmselt mõttekas käsitleda faktorit juhuslikuna.

- Kas faktori tasemed on valitud sihipäraselt (mitte juhuslikult)?

  Kui jah, siis ilmselt tuleb faktorit käsitleda fikseerituna.

Juhuslikud faktorid, segamudel

- **Eelised**
  - Segamudelid võimaldavad tunduvalt üldistada tehtavaid statistilisi järeldusi.
  - Segamudelid võimaldavad paindlikult modelleerida vaatluste kovariatsioonistruktuuri.
  - Segamudelite alusel tehtavad järeldused on vähem tundlikud andmete ebatäielikkuse ja/või mittetasakaalulisuse suhtes.
- **Puudused**
  - Tehtavate tõenäosusjaotuslike eelduste ja kasutatavate lähenduste hulk on suurem, mis võib viia nihkega hinnanguteni.
  - Mudelite suurem komplitseeritus võib muuta keeruliseks andmete töötlemise ja tulemuste esitamise.

Juhuslikud faktorid, segamudel

Näide 1

Testitakse kolme erineva rahusti mõju (kolmel sarnasel patsientide grupil)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

α_i – ravimi i mõju, i=1,2,3, kusjuures kõik kolm testitavat ravimit on eelnevalt võrdlemiseks välja valitud

↓

vaatluse all on **iga ravimi** efekt

fikseeritud efektid,
fikseeritud mudel

Näide 2

Uut tüüpi süstitavat insuliini testitakse kolmes kliinikus

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

α_i – kliiniku i mõju, i=1,2,3, kusjuures uuringus osalenud kliinikud on valitud juhuslikult

↓

huvi pakub kliiniku **osa** ravimi mõju **koguvarieeruvusest**

juhuslikud efektid,
juhuslik mudel

Fikseeritud ja juhusliku mudeli karakteristikud ühefaktorilisel DA-l matemaatika mõistes

Karakteristik	Fikseeritud mudel	Juhuslik mudel
Mudel	$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$	$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$
$\mathrm{E}(y_{ij})$	$\mathrm{E}(y_{ij}) = \mu + \alpha_i$	$\mathrm{E}(y_{ij} \mid \alpha_i) = \mu + \alpha_i$ $\mathrm{E}(y_{ij}) = \mu$
α_i	fiks. tundmatu konstant $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \mu$	$\alpha_i \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_\alpha^2)$ $\tilde{\alpha}_i = \dfrac{n_i \sigma_\alpha^2}{\sigma_\varepsilon^2 + n_i \sigma_\alpha^2}(\bar{y}_{i.} - \mu)$
ε_{ij}	$\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_\varepsilon^2)$	$\varepsilon_i \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_\varepsilon^2)$
$\mathrm{var}(y_{ij})$	$\mathrm{var}(y_{ij}) = \sigma_\varepsilon^2$	$\mathrm{var}(y_{ij}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2$
$\mathrm{cov}(y_{ij}, y_{i'j'})$	$\mathrm{cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, i = i', j = j' \\ 0, \text{ mujal} \end{cases}$	$\mathrm{cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2, i = i', j = j' \\ \sigma_\alpha^2, i = i', j \neq j' \\ 0, \text{ mujal} \end{cases}$

Juhuslikud faktorid, segamudel

2 pulli, kummaltki 3 järglast.

Mudel, hindamaks isa mõju järglaste: $y_{ij} = \mu + s_i + \varepsilon_{ij}$

Isa, kui fikseeritud faktor

$$\mathrm{var}(\mathbf{y}) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{21} & y_{22} & y_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Isa, kui juhuslik faktor

$$\mathrm{var}(\mathbf{y}) = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_s^2 & \sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_s^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_s^2 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Segamudeli üldkuju

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$$

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ \mathbf{u}\\ \mathbf{e}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \text{ ja } \mathrm{var}\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ \mathbf{u}\\ \mathbf{e}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R} & \mathbf{G}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}\\ \mathbf{Z}\mathbf{G} & \mathbf{G} & \mathbf{0}\\ \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{R}\end{pmatrix}, \ \mathrm{var}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}, \ \mathrm{var}(\mathbf{e}) = \mathbf{R}$$

Fikseeritud efektide $\boldsymbol{\beta}$ üldistatud vähimruutude hinnangud [*GLS*, *generalized least squares*]: $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$

Juhuslike faktorite realiseerunud väärtuste $\mathbf{u}$ parim lineaarne nihketa prognoos [*BLUP*, *best linear unbiased prediction*]: $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$

(Hendersoni) segamudeli võrrand [*mixed model equation*]:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\\ \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ \hat{\mathbf{u}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}\\ \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}\end{pmatrix}$$

Kui $\mathbf{R} = \mathbf{I}_n\sigma_e^2$ ja $\mathbf{G} = \mathbf{I}_a\sigma_u^2$, siis $\begin{pmatrix}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} & \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\\ \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} & \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z} + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}\mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ \hat{\mathbf{u}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\\ \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\end{pmatrix}$

Mudelite võrdlemine

Hierarhiliste mudelite võrdlemiseks

¤ lihtsamal juhul dispersioonanalüüs (*F*-statistik -> *p*-väärtus)

¤ keerulisemal juhul tõepärasuhte test [*likelihood ratio test*]

$$\Lambda(\mathbf{z}) = -2\ln\left[\frac{\hat{L}_k(\mathbf{z})}{\hat{L}(\mathbf{z})}\right] = -2\left\{\ln\left[\hat{L}_k(\mathbf{z})\right] - \ln\left[\hat{L}(\mathbf{z})\right]\right\} \underset{H_0}{\sim} \chi^2(r)$$

Üldisema võrdlemise tarvis

¤ AIC (Akaike informatsiooni kriteerium)

¤ BIC (Bayesi informatsiooni kriteerium)

NB! Testida ei saa, mida väiksem väärtus, seda parem.